

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط



سَلْطَنَةُ عُومَانِ
وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ وَالتَّعْلِيمِ

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب النشاط

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

1445 هـ - 2023 م

الطبعة التجريبية

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS ، المملكة المتحدة.

تشكل مطبعة جامعة كامبريدج جزءاً من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعياً وراء تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي المسموح به قانوناً ولأحكام التراخيص ذات الصلة.

لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمت مواءمتها من كتاب النشاط - الرياضيات للصف الثاني عشر - من سلسلة Cambridge international AS & A level Mathematics 1، للمؤلفين موريل جايمز، ودين تشالمرز.

تمت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد الموقع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة جامعة كامبريدج.

لا تتحمل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توافر أو دقة المواقع الإلكترونية المستخدمة في هذا الكتاب ومصادقيتها، ولا تؤكد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ٣٦ / ٢٠٢٣ واللجان المنبثقة عنه



جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

لا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزئاً أو ترجمته

أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال

إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.



حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المعظم
-حفظه الله ورعاه-



المغفور له
السلطان قابوس بن سعيد
-طيب الله ثراه-

سلطنة عُمان

(المحافظات والولايات)





النشيد الوطني



يا رَبَّنَا احْفَظْ لَنَا
وَالشَّعْبَ فِي الْأَوْطَانِ
وَلِيَدُمُ مَوَئِدًا
جَلَالَةَ السُّلْطَانِ
بِالْعِزِّ وَالْأَمَانِ
عَاهِلًا مُمَجِّدًا

بِالنُّفُوسِ يُفْتَدَى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبِيِّ
فَارْتَقِي هَامَ السَّمَاءِ
أَوْفِيَاءُ مِنْ كِرَامِ الْعَرَبِ
وَأَمْلَأِي الْكَوْنَ ضِيَاءَ

وَاسْعِدِي وَانْعَمِي بِالرَّخَاءِ

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيدنا مُحَمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلَبِّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلّعاته المستقبلية، ولتتواءم مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوّنًا أساسيًا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقرّرات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ انساقًا مع التطوّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبني مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتين المادّتين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلبة، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التّأفّسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيم واتجاهات، جاء مُحَقَّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، ومواءمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمّن من أنشطة وصور ورسوم. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّيّة لأبنائنا الطلبة النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم



المحتويات

كيف تستخدم هذا الكتاب؟ xii

الوحدة الأولى: القياس الدائري

- ١-١ الراديان ١٣
- ٢-١ طول القوس ١٧
- ٣-١ مساحة القطاع الدائري ٢٠
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى ٢٣

الوحدة الثانية: حساب المثلثات

- ١-٢ الزوايا بين 0° ، 90° ٢٩
- ٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية) ٣٣
- ٣-٢ النسب المثلثية للزوايا العامة ٣٥
- ٤-٢ التمثيلات البيانية للدوال المثلثية ٣٨
- ٥-٢ الدوال المثلثية العكسية ٤٣
- ٦-٢ المعادلات المثلثية ٤٦
- ٧-٢ المتطابقات المثلثية ٥٠
- ٨-٢ المزيد من المعادلات المثلثية ٥٣
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية ٥٦

الوحدة الثالثة: مقدمة في النهايات والاتصال

- ١-٣ نهاية الدالة عند نقطة ٥٩
- ١-٣ أ نهاية الدالة كثيرة الحدود ٥٩
- ١-٣ ب نهاية الدالة النسبية ٦٢
- ١-٣ ج نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة ٦٦
- ٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية
(س $\leftarrow \infty$) ٧١
- ٣-٣ خواص النهايات ٧٣
- ٤-٣ الاتصال ٧٦
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة ٨٢

الوحدة الرابعة: التفاضل

- ١-٤ المشتقة وعلاقتها بالميل ٨٥
- ٢-٤ مشتقة دالة القوة ٨٧
- ٣-٤ قاعدة السلسلة ٩١
- ٤-٤ المماس والعمودي ٩٣
- ٥-٤ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة ٩٥
- ٦-٤ النقاط الحرجة ٩٨
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة ١٠٢

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم. يعطي هذا الجزء صورة مختصرة لهذه الميزات.

ستتعلم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحويل بين الراديان، والدرجة.

٢-١ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

٣-١ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

٤-١ تحل المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

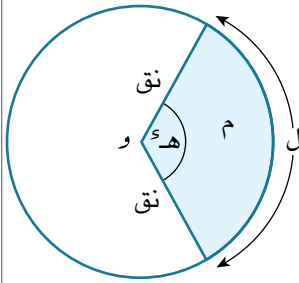
مساعدة

الجذر التربيعي
توجد له قيمتان:
قيمة موجبة وقيمة
سالبة.

مساعدة: إطارات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول محتوى الكتاب.

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى



١) استخدم الشكل المجاور في كل أجزاء هذا التمرين، حيث نق هو نصف قطر الدائرة التي مركزها و (سم)، ل هو طول القوس (سم)، م هو مساحة القطاع الدائري المظلّل (سم^٢)، ه الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالراديان إذا علمت أن:

أ) نق = ٧، ه = ١، ٢، ١، فأوجد ل، م.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة:

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي أسئلة الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

★ تركّز هذه الأسئلة على حل المسائل.

☆ تركّز هذه الأسئلة على البراهين.

★ تركّز هذه الأسئلة على النمذجة.

★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس، وقد تم ترميزها بنجمة صفراء.

يجب ألا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

ستتعلم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحوّل بين الراديان، والدرجة.


٢-١ تستخدم قانون طول القوس لحساب نصف القطر، وطول القوس، والزاوية المركزية بالراديان.

٣-١ تستخدم قانون مساحة القطاع الدائري لحساب المساحة، ونصف القطر، والزاوية المركزية بالراديان.

٤-١ تحلّ المسائل التي تتعلق بطول القوس، ومساحة القطاع في الدائرة، بما في ذلك الحسابات المتعلقة بأطوال أضلاع، وزوايا، ومساحات المثلثات.

١-١ الراديان Radian

تمارين ١-١

١)  حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية إلى الراديان، واكتب الناتج بدلالة π :

ج ٤٥°

ب ١٤٠°

أ ٩٠°

و ١٨°

هـ ٧٢°

د ٣٠°

ط ٧٢٠°


ح $٢٢\frac{1}{2}$ °

ز ١٢٠°


ي ٩°

ك ٢٧٠°

ي ٤٢٠°

(٢)  حوّل قياس كل زاوية من الزوايا الآتية من الراديان إلى الدرجات:

د $\frac{\pi}{8}$	ج $\frac{\pi}{5}$	ب $\frac{\pi}{20}$	أ $\frac{\pi}{18}$
_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____
ح $\frac{\pi^2}{5}$	ز $\frac{\pi^5}{8}$	و $\frac{\pi^2}{3}$	هـ $\frac{\pi}{9}$
_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____
ط $\frac{\pi^5}{18}$	ك $\frac{\pi}{2}$	ي π^6	_____
_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____

(٣)  اكتب قيمة كل مما يأتي:

د جتا $\frac{\pi^2}{2}$	ج ظا $\frac{\pi}{6}$	ب جتا $\frac{\pi}{4}$	أ جا $\frac{\pi}{3}$
_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____
ح جا $\frac{\pi^2}{3}$	ز ظا $\frac{\pi^5}{3}$	و جتا $\frac{\pi^7}{6}$	هـ جا $\frac{\pi^7}{4}$
_____	_____	_____	_____
_____	_____	_____	_____

(٤) اكتب كل زاوية من الزوايا الآتية بالراديان مقربةً إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ (١) 288°	ب (٢) 20°
_____	_____
_____	_____
_____	_____
ب (١) 270°	ب (٢) 90°
_____	_____
_____	_____
_____	_____

ج (١) °٦٥

د (٢) °١٤٥

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

د (١) °١٠٠

د (٢) °٨٣

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

٥) اكتب كلاً من الزوايا الآتية بالدرجات، مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة:

أ (١) $\frac{\pi}{8}$

ب (٢) $\frac{\pi}{4}$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

ب (١) $\frac{\pi}{6}$

ب (٢) $\frac{\pi}{3}$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

ج (١) $\frac{\pi}{2}$

ج (٢) $\frac{\pi}{3}$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

د (١) °١,٢٢

د (٢) °٤,٦٣

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

(٦) اكتب كلاً من الزوايا الآتية بالدرجات مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

ج ١,٠٦°

ب ٢,٢°

أ ١,٥°

هـ ٠,٦٨°

د ١,٩٣°

(٧) استخدم الآلة الحاسبة لتجد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

ج ظا ١,٢°

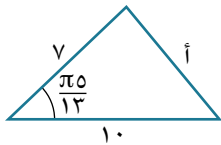
ب جتا ٠,٨°

أ جتا ١,٢°

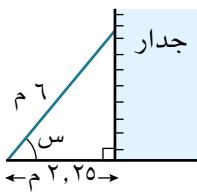
و ظا $\frac{\pi}{4}$

هـ جتا $\frac{\pi}{5}$

د جتا $\frac{\pi}{10}$



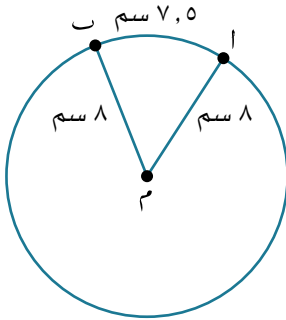
(٨) إذا علمت أن أطوال أضلاع المثلث المجاور بوحدة الطول هي ٧، ١٠، ١٠، وقياس إحدى زواياه يساوي $\frac{\pi}{13}$ ، فأوجد قيمة أ مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.



(٩) ★ يبين الشكل المجاور سلماً طوله ٦ م مستنداً إلى حائط رأسي. تم تثبيت السلم على الأرض الأفقية، وطول المسافة بين قاعدة السلم والجدار تساوي ٢,٢٥ م. يكون استخدام السلم آمناً عندما لا تقل الزاوية س عن ١,٢°. أوجد قيمة س بالراديان مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية. هل السلم آمن للاستخدام؟

٢-١ طول القوس Arc length

تمارين ٢-١



في هذه التمارين، اكتب الإجابات مقربة إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة.

(١) في الشكل المجاور، نصف قطر الدائرة يساوي ٨ سم، وطول القوس الأصغر AB يساوي ٧,٥ سم. احسب قياس الزاوية الحادة AMB:

أ بالراديان. ب بالدرجات.

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

(٢) تقع النقطتان L، K على محيط دائرة مركزها M. إذا علمت أن طول \widehat{LK} يساوي ١٢ سم، و $(\widehat{LMK}) = 6,1^\circ$ ، فأوجد طول نصف قطر الدائرة.

(٣) أوجد (بدلالة π) طول القوس في كل من القطاعات الدائرية الآتية:

أ نصف القطر ٤ سم، قياس الزاوية $\frac{\pi}{4}$ ب نصف القطر ٣ سم، قياس الزاوية $\frac{\pi}{4}$

_____	_____
_____	_____

ج نصف القطر ١٠ سم، قياس الزاوية $\frac{\pi}{5}$ د نصف القطر ١٢ سم، قياس الزاوية $\frac{\pi}{6}$

_____	_____
_____	_____

(٤) أوجد طول قوس كل قطاع دائري من القطاعات الآتية بالراديان إذا علمت أن:

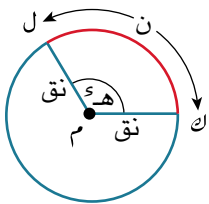
أ نق = ١٢ سم، قياس الزاوية ١, ٢°

ب نق = ٤, ٥ سم، قياس الزاوية ٥٥°, ٥°

(٥) أوجد قياس زاوية كل قطاع من القطاعات الآتية بالراديان:

أ نصف القطر ٢٠ سم، طول القوس ٥ سم.

ب نصف القطر ٩, ٣٦ سم، طول القوس ٥, ٢ سم.



(٦) دائرة مركزها م، ونصف قطرها نق. القوس الأصغر ل ك يقابل الزاوية هـ°, وطوله يساوي ن. أوجد:

أ ن عندما نق = ٩, هـ = $\frac{\pi 3}{5}$

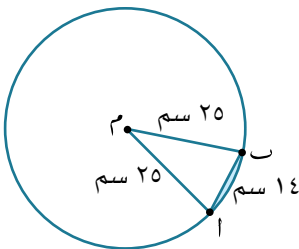
ب نق عندما $n = 14,9$ هـ $h = 2,98$

ج هـ عندما $n = \frac{\pi 49}{9}$ ، نق $v =$

(٧) قطاع دائري من دائرة نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها هـ^س. إذا علمت أن محيط القطاع يساوي ٥٠ سم، فأوجد قياس الزاوية هـ.



(٨) يبين الشكل المجاور القطاع الدائري م ا ب من دائرة مركزها م، حيث $\widehat{AMB} = 2,3^\circ$. إذا علمت أن محيط القطاع يساوي ٣٠ سم، فأوجد طول م أ.

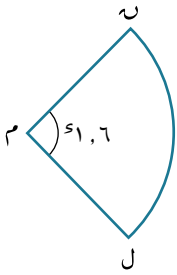


(٩) أوجد محيط القطعة الدائرية الصغرى من الدائرة التي مركزها م، ونصف قطرها ٢٥ سم، حيث طول الوتر ا ب = ١٤ سم.

٣-١ مساحة القطاع الدائري Area of a sector

تمارين ٣-١

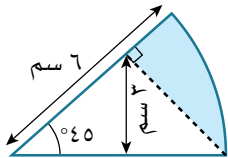
(١) قطاع دائري قياس زاويته $٦١,٢^\circ$ ، ومساحته ٥٤ سم^٢. أوجد نصف قطر الدائرة.



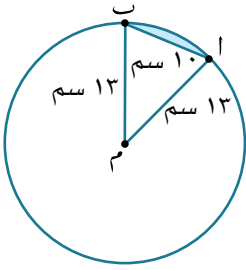
(٢) إذا علمت أن محيط القطاع الدائري المجاور يساوي ٢٨ سم، فأوجد مساحته.

(٣) قطاع دائري قياس زاويته $٩,٠^\circ$ ، ومساحته ١٨٠ سم^٢. أوجد نصف قطر الدائرة.

(٤) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور.



(٥) تقع النقطتان ل، ك على محيط دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٥ سم. الفرق بين مساحة القطاع الأكبر ل م ك، والقطاع الأصغر ل م ك يساوي ١٥ سم^٢. أوجد قياس الزاوية المنفرجة ل م ك.

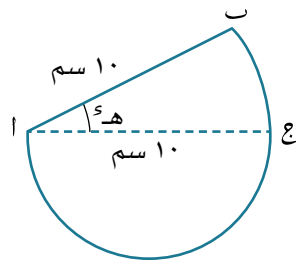


(٦) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور، حيث م هي مركز الدائرة، وطول نصف قطرها ١٣ سم، وطول الوتر $AB = 10$ سم.

(٧) ★ وتر في دائرة يقابل الزاوية المركزية $هـ^\circ$ ، ويقطع قطعة دائرية مساحتها $\frac{1}{4}$ المساحة الإجمالية للدائرة:

أ. $\frac{\pi}{4} = هـ^\circ - ج ا هـ^\circ$

ب. أثبت أن $هـ^\circ = 2,31^\circ$ مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

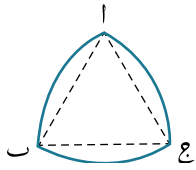


(٨) ★ ا ب ج قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ١٠ سم، ومركزها أ. و $(\angle BAC) = هـ^\circ$ ، مساحة نصف الدائرة التي قطرها ا ج = ضعف مساحة القطاع الدائري ا ب ج.

أوجد:

أ. $هـ$ بدلالة π .

ب. محيط كامل الشكل بدلالة π .

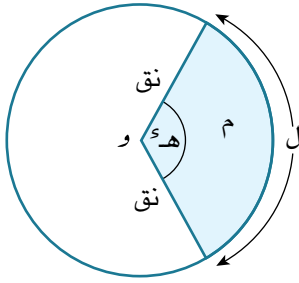


٩) قطعة معدنية تتشكل في البداية من مثلث متساوي الأضلاع 123 طول ضلعه 2 سم. تمر الدائرة التي مركزها 1 بالنقطتين 2 ، 3 ، وتمر الدائرة التي مركزها 2 بالنقطتين 1 ، 3 ، وتمر الدائرة التي مركزها 3 بالنقطتين 1 ، 2 . أوجد محيط القطعة المعدنية، ومساحة أحد وجهيها.

١٠) ★ دائرة مركزها O ، ونصف قطرها 2 سم. قطاع دائري فيها محيطه 6 سم، وقياس زاويته المركزية 60° .
 أ) بين أن $60^\circ = \frac{6}{2} - 2$ ، واكتب مساحة القطاع الدائري (م سم²) بدلالة 2 .

ب) بين أن أكبر مساحة ممكنة للقطاع الدائري (م) عندما $\frac{6}{2} = 2$ ، واحسب القيمة المناظرة للزاوية 60° .

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى



(١) استخدم الشكل المجاور في كل أجزاء هذا التمرين، حيث نق هو نصف قطر الدائرة التي مركزها و (سم)، ل هو طول القوس (سم)، م هو مساحة القطاع الدائري المظلّل (سم^٢)، هـ الزاوية المركزية المقابلة للقوس بالراديان إذا علمت أن:

أ نق = ٧، هـ = ١، ٢ = ١، ٢، فأوجد ل، م.

ب نق = ٣، ٥، هـ = ٢، ١ = ٢، ١، فأوجد ل، م.

ج ل = ١٢، نق = ٨، فأوجد هـ، م.

د ل = ١٤، هـ = ٠، ٧ = ٠، ٧، فأوجد نق، م.

هـ م = ٣٠، نق = ٥، فأوجد هـ، ل.

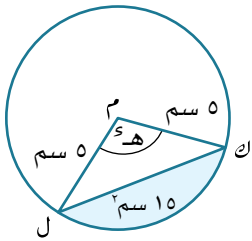
و م = ٦٤، ل = ١٦، فأوجد نق، هـ.

ز م = ٢٤، نق = ٦، فأوجد ل.

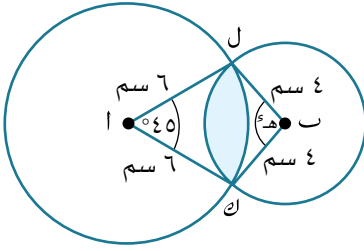
ح م = ٣٠، ل = ١٠، فأوجد هـ^س.

٢) قطاع دائري محيطه ح = ١٢ سم، وقياس زاويته المركزية هـ = (٠, ٤)^س. أوجد نصف قطر الدائرة.

٣) قطاع دائري محيطه ٧ سم، ومساحته ٣ سم^٢. أوجد الأطوال الممكنة لنصف قطر الدائرة.



٤) ★ في الشكل المجاور: دائرة مركزها م، ونصف قطرها ٥ سم. ل ك يقابل الزاوية المركزية هـ^س. إذا علمت أن مساحة القطعة الدائرية الصغرى (المظللة) تساوي ١٥ سم^٢، فبيّن أن جا هـ^س = هـ^س - ١, ٢



٥) في الشكل المجاور: دائرتان مركزهما A ، B تتقاطعان

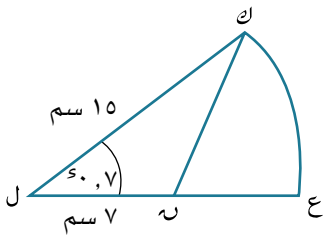
عند النقطتين L ، K. نصف قطر الدائرتين ٦ سم، ٤ سم،

و $\angle A\hat{K} = 45^\circ$:

أ) بيّن أن طول L ك $= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

ب) أوجد و $\angle L\hat{K}$.

ج) أوجد مساحة المنطقة المظللة (مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة).

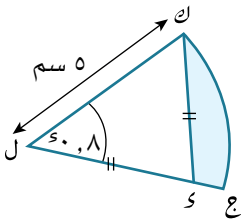


٦) بيّن الشكل المجاور القطاع الدائري ل K ع في دائرة مركزها L،

ونصف قطرها ١٥ سم. و $\angle L\hat{K} = (7, 0)^\circ$ ، طول L ن = ٧ سم، أوجد:

أ) مساحة المنطقة ك ن ع.

ب محيط المنطقة ك ه ع.



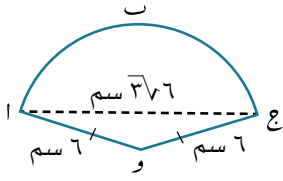
★ (٧) يبيّن الشكل المجاور ل ك ج قطاعًا دائريًا في دائرة نصف قطرها ٥ سم، ومركزها ل، و $\widehat{K} = 80^\circ$. احسب مقربًا الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية عند الضرورة:

أ طول ك ج.

ب مساحة القطاع الدائري ل ك ج.

ج طول ل ك.

د مساحة المنطقة المظللة.



٨) أوجد ب قطاع دائري في دائرة نصف قطرها ٦ سم. طول $a = 3\sqrt{6}$ سم.

أوجد:

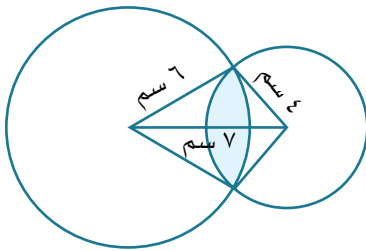
أ) \widehat{a} و \widehat{b} .

ب) مساحة القطاع الدائري أ و ج.

ج) مساحة المثلث أ و ج.

د) مساحة القطعة الدائرية أ ج ب (مقرَّباً إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

هـ) محيط القطاع الدائري أ و ج ب (مقرَّباً إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).



(٩) يبيّن الشكل المجاور دائرتين متقاطعتين نصف قطرَيْهما ٦ سم، ٤ سم، والمسافة بين مركزيهما ٧ سم. أوجد محيط ومساحة المنطقة المظللة المشتركة بين الدائرتين (مقرّباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية).

ستتعلم في هذه الوحدة كيف:

- ١-٢ تتذكر القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها 0° ، 30° ، 45° ، 60° ، 90° ، وقيمها المكافئة بالراديان، وتجد القيم الدقيقة للزوايا المتعلقة بها.
- ٢-٢ تجد القيم الدقيقة (بالدرجات أو بالراديان) للنسب المثلثية (جاه، جتاه، ظاه) بمعلومية إحداها.
- ٣-٢ ترسم وتستخدم التمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لأي زاوية (بالدرجات وبالراديان).
- ٤-٢ ترسم التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد) للتمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لزوايا قياسها بين 0° ، 360° أو بين 0 ، 2π ، مثل: $\sin 2 = \cos 3$.
- ٥-٢ تستخدم الصيغ جا^{-١}(س)، جتا^{-١}(س)، ظا^{-١}(س) للتعبير عن القيم الرئيسية للعلاقات العكسية للمثلثات، وتجد قيم الدوال البسيطة باستخدام المعرفة حول القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها 0° ، 45° ، 60° وقيمها المكافئة بالراديان.
- ٦-٢ تحل معادلات مثلثية بسيطة تقع في مجال محدد بالدرجات أو بالراديان.
- ٧-٢ تستخدم المتطابقات ظا ه = $\frac{\text{جا}(\text{ه})}{\text{جتا}(\text{ه})}$ ، جا^٢(ه) + جتا^٢(ه) = ١ لتحل معادلات مثلثية في براهين مثلثية بالدرجات وبالراديان.

١-٢ الزوايا بين 0° و 90°

Angles between 0° and 90°

تمارين ١-٢

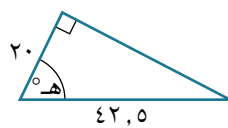
(١) لكل مثلث من المثلثات المبينة أدناه:

أ استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول الضلع الثالث.

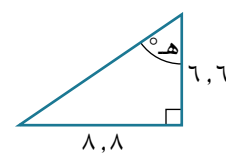
ب اكتب قيمة جا ه، جتا ه، ظا ه



(٣)



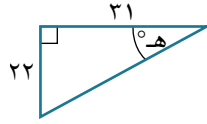
(٢)



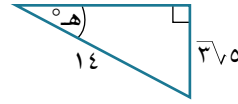
(١)



(٦)



(٥)



(٤)

(٢) إذا علمت أن $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، حيث θ زاوية حادة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ ب ظا هـ ج $2 \cos \theta \times \sin \theta$

د $\frac{3}{\sin^2 \theta}$ هـ $\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$ و $\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

٣٠

مساعدة



جا^٢ هـ تعني (جا هـ)^٢

(٣) إذا علمت أن $\sin \theta = \frac{5}{4}$ ، حيث θ زاوية حادة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ جا هـ ب جتا هـ

ج جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ د $\frac{2 \sin \theta}{\sin \theta}$

و $\frac{5 \text{ جا ه}}{1 - \text{جتا ه}}$

ه $\frac{2}{\text{جا ه} + \text{جتا ه}}$

(٤) أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

ب $٦٠^\circ \text{ جا}^\circ$

أ $٦٠^\circ \text{ جا} \times ٦٠^\circ \text{ جتا}$

د $\frac{٣٠^\circ \text{ جا}}{٦٠^\circ \text{ جا}}$

ج $٣٠^\circ \text{ جتا} + ٣٠^\circ \text{ جا}$

و $\frac{٣٠^\circ \text{ جتا} + ٣٠^\circ \text{ جا}}{٣٠^\circ \text{ جتا} - ٣٠^\circ \text{ جا}}$

ه $\frac{٤٥^\circ \text{ ظا}}{٣٠^\circ \text{ ظا} + ٢}$

(٥) أوجد قيمة كلّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

ب $٣٠^\circ \text{ ظا} + ١$

أ $١ - ٣٠^\circ \text{ جا}$

د $٦٠^\circ \text{ جتا} - ٣٠^\circ \text{ جتا}$

ج $٤٥^\circ \text{ جا} + ٦٠^\circ \text{ جا}$

(٦) بيّن أن:

أ $٩٠^\circ \text{ جا} = ٣٠^\circ \text{ جا} \times ٦٠^\circ \text{ جتا} + ٣٠^\circ \text{ جتا} \times ٦٠^\circ \text{ جا}$

ب) $\text{جا } ٤٥^\circ + \text{جتا } ٤٥^\circ = ١$

ج) $\text{جتا } ٣٠^\circ - \text{جا } ٣٠^\circ = \text{جتا } ٦٠^\circ$

د) $(١ + \text{ظا } ٦٠^\circ)^2 = ٤ + ٢\sqrt{٣}$

٧ ★ $\frac{\sqrt{٥}}{٦} = \text{جتا } ٦٠^\circ + \text{ظا } ٣٠^\circ$ بيّن أن جا

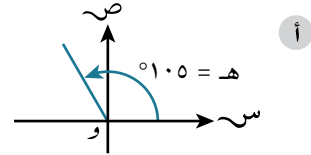
٨ ★ إذا كان $\sqrt{٦} + \sqrt{٣} - \sqrt{١} = \frac{\text{جا } ٣٠^\circ + \text{جا } ٤٥^\circ}{\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{جتا } ٤٥^\circ}$ ، فأوجد قيمتي أ ، ب.

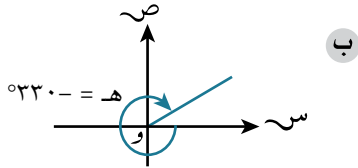
٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية)

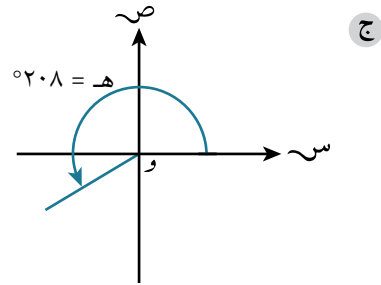
The Principal angle (the reference angle)

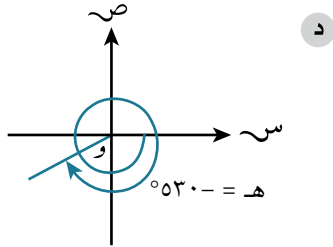
تمارين ٢-٢

(١) أوجد زاوية الأساس للزاوية هـ في كل ممّا يأتي:









(٢) في كل ممّا يأتي، سمّ الربع الذي تقع فيه و ل عندما تكون الزاوية التي تصنعها و ل مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل:

أ ١٤٥° ب ٣٤٠° ج ١٠٠° د ١٨٥°

هـ ٣٨٠° و $\frac{2\pi}{5}$ ز $\frac{12\pi}{5}$

(٣) إذا علمت أن θ هي زاوية الأساس للزاوية θ ، فأوجد قيمة θ في كل مما يأتي:

أ $\theta = 75^\circ$ تقع في الربع الثاني، $0^\circ < \theta < 360^\circ$

ب $\theta = 30^\circ$ تقع في الربع الثالث، $-180^\circ < \theta < 0^\circ$

ج $\theta = 54^\circ$ تقع في الربع الرابع، $360^\circ < \theta < 720^\circ$

د $\theta = \frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الثالث، $0 < \theta < \pi$

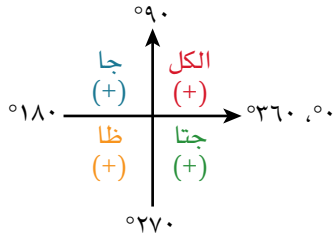
هـ $\theta = \frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني، $\pi < \theta < 2\pi$

و $\theta = \frac{\pi}{5}$ تقع في الربع الرابع، $-\pi < \theta < -2\pi$

٣-٢ النسب المثلثية للزوايا العامة

Trigonometric ratios of general angles

مساعدة



يذكر المخطط المجاور بالربع الذي تكون فيه كل نسبة من النسب المثلثية موجبة.

تمارين ٣-٢

(١) إذا علمت أن $\sin \theta = \frac{2}{3}$ ، $270^\circ > \theta > 360^\circ$ ، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ. $\cos \theta$. ب. $\tan \theta$.

(٢) إذا علمت أن $\tan \theta = 3$ ، فأوجد القيمتين الممكنتين لـ $\cos \theta$.

(٣) إذا علمت أن $\sin \theta = \cos \theta$ ، حيث $90^\circ > \theta > 180^\circ$ ، فاكتب جتا θ بدلالة $\sin \theta$.

(٤) إذا علمت أن $\sin \theta = \frac{12}{13}$ ، حيث θ زاوية منفرجة، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

أ. $\cos \theta$. ب. $\tan \theta$.

(٥) إذا علمت أن $\tan(\theta) = \frac{3}{4}$ ، جا $(\theta) = \frac{3}{5}$ ، حيث θ تقعان في الربع نفسه، فأوجد قيمة كل مما يأتي:

ب جتا (θ)

أ جتا (θ)

د ظا (θ)

ج جتا (θ)

(٦) أوجد قيمة كل مما يأتي:

(٢) جتا $\frac{\pi}{4}$

أ (١) جتا $\frac{\pi}{4}$

(٢) جا $(\frac{\pi}{3})$

ب (١) جا $(\frac{\pi}{3})$

(٢) ظا $(\frac{\pi}{4})$

ج (١) ظا $\frac{\pi}{4}$

(٧) أوجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

ج جتا $\frac{\pi}{3}$ - جتا $\frac{\pi}{6}$

ب جا $(\frac{\pi}{4})$ + جا $(\frac{\pi}{3})$

أ ١ - جا $(\frac{\pi}{6})^2$

★ ٨) بيّن أن $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

★ ٩) بيّن أن $\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

٢-٤ التمثيلات البيانية للدوال المثلثية

Graphs of trigonometric functions

مساعدة



قبل أن تبدأ بحل تمارين الدرس ٢-٤، تأكد من أنك تفهم المقصود بالمصطلحات الآتية: الدورة، السعة، خط التقارب، الراديان، المجال، المدى، الدالة.

مساعدة



لا يؤثر الانسحاب والتمدد الرأسى على الدورة.
لا يؤثر الانسحاب والتمدد الأفقى على السعة.

تمارين ٢-٤

مساعدة



نحصل على التمثيل
البياني للدالة
ص = جتا س من التمثيل
البياني للدالة
ص = جا س بالانسحاب
٩٠° إلى اليسار والعكس
صحيح. أي أن:
جتا س = جا (س + ٩٠°)
جا س = جتا (س - ٩٠°)

(١) سمّ السعة والدورة لكل دالة من الدوال الآتية:

ب) د(س) = جتا $\left(\frac{س}{٢}\right)$

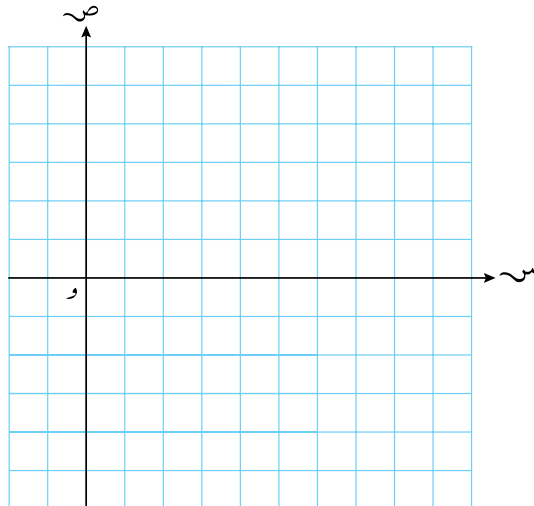
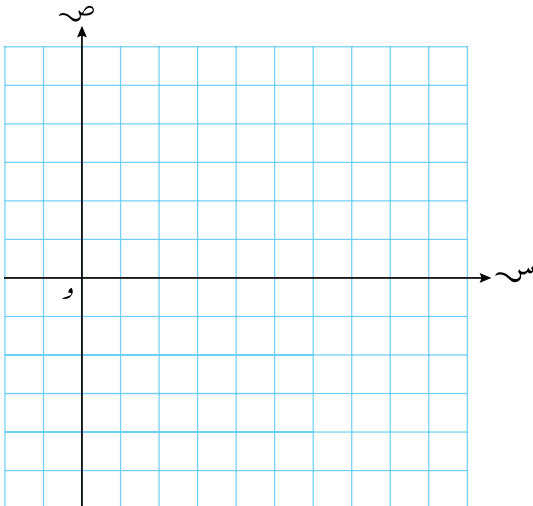
أ) د(س) = ٣ جا (٤س)

د) د(س) = ٢ جا $(\pi س)$

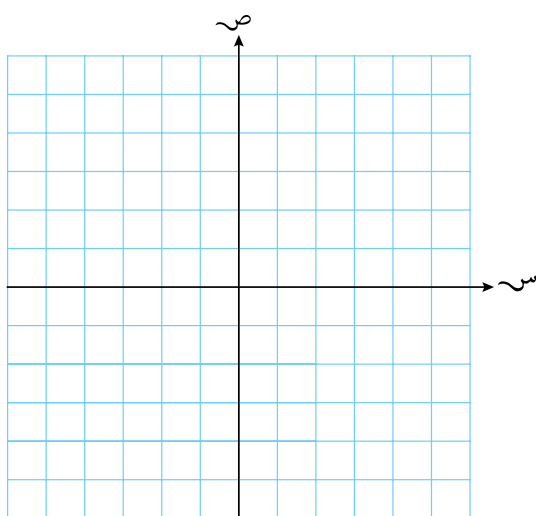
ج) د(س) = جتا (٣س)

(٢) ارسم بيان كل من الدوال الآتية، وحدد أعلى قيمة وأقل قيمة للدالة:

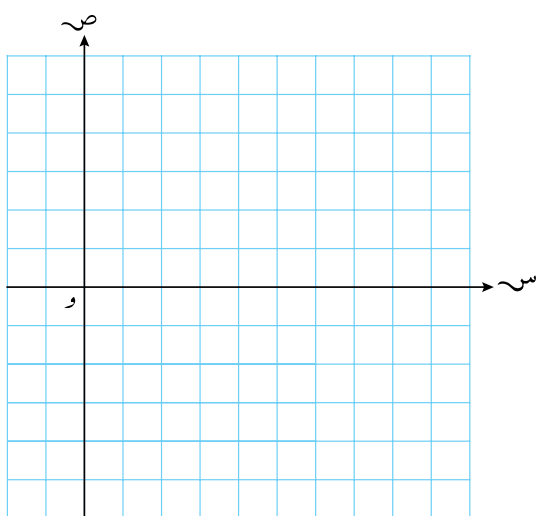
أ) (١) ص = جتا $\left(س - \frac{\pi}{٣}\right)$ ، $\pi س \geq ٠$ ، (٢) ص = جا $\left(س + \frac{\pi}{٢}\right)$ ، $\pi س \geq ٠$



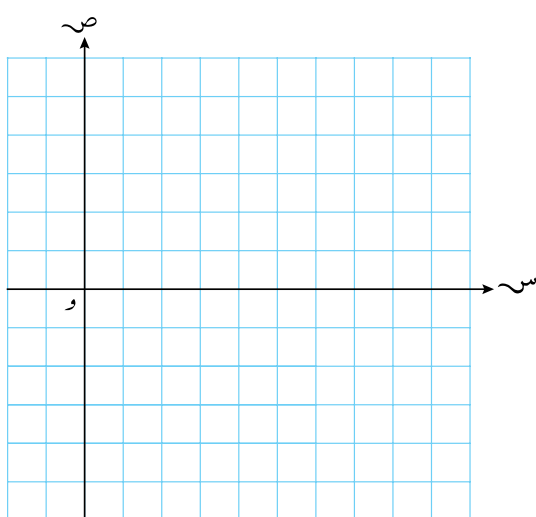
ب (١) ص = جا (٢س) ، $\pi - \pi \geq \pi \geq 0$



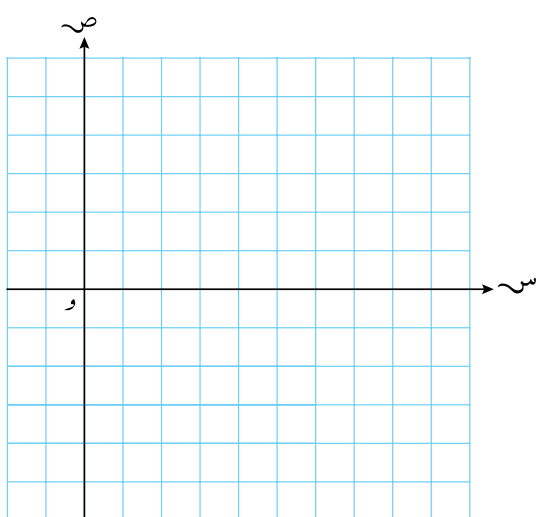
٢) ص = جتا (٣س) ، $\pi \geq \pi \geq 0$



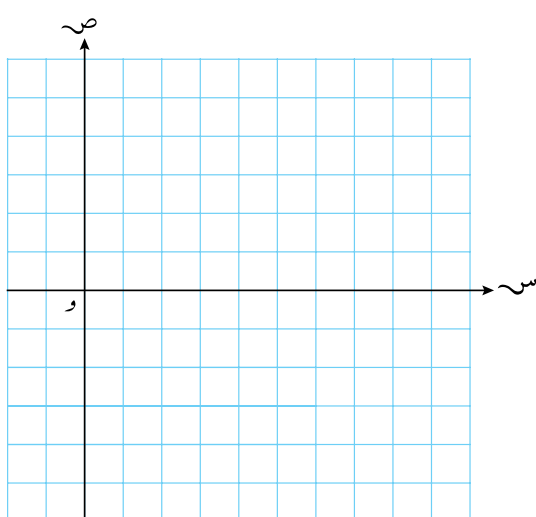
ج (١) ص = ظا (س - $\frac{\pi}{2}$) ، $\pi \geq \pi \geq 0$



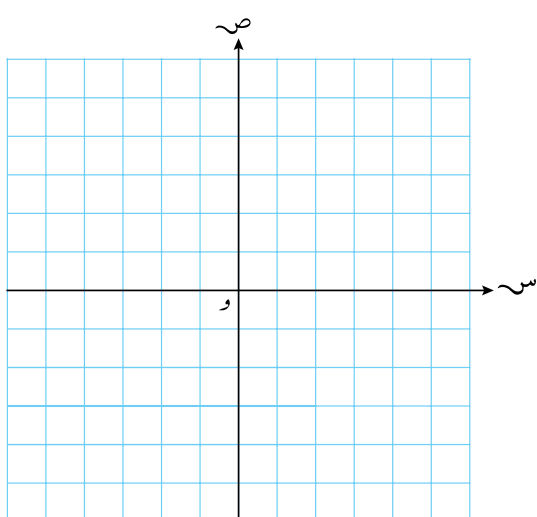
٢) ص = ظا (س + $\frac{\pi}{3}$) ، $\pi \geq \pi \geq 0$



د (١) ص = ٢- + ٣جتا س ، $\pi \geq \pi \geq 0$



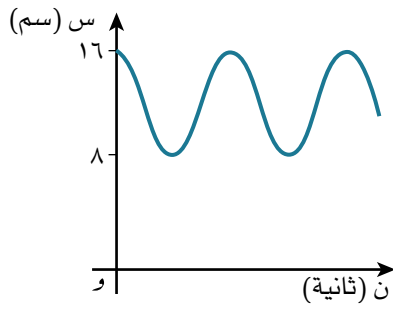
٢) ص = ١ + ٢جا س ، $\pi \geq \pi \geq 0$



★ (٣) يتغير عمق الماء في مرفأ خلال اليوم، ويعطى التغير بالمعادلة $٧ + ١٦ =$ جتا $\left(\frac{\pi}{١٢}ن\right)$ ، حيث $م$ العمق بالأمتار، $ن$ الوقت بالساعات بعد منتصف الليل.

أ أوجد عمق الماء عند المد، وعند الجزر.

ب في أي وقت يحدث المد؟



★ (٤) يوضح التمثيل البياني المجاور كيف تتغير المسافة (س سم) بين نقطة ثابتة وجسيم دوّار مع مرور الوقت. معادلة البيان هي: $س = م + أ$ جتا $(٥\pi ن)$ ، حيث $ن$ مقيسة بالثواني؛ $أ$ ، $م$ عددان ثابتان.

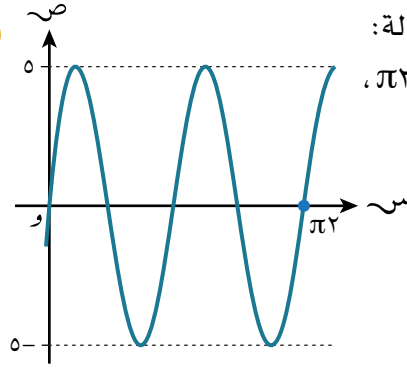
أ أوجد السعة.

ب ما الوقت الذي يستغرقه الجسيم للقيام بخمس دورات كاملة؟

مساعدة



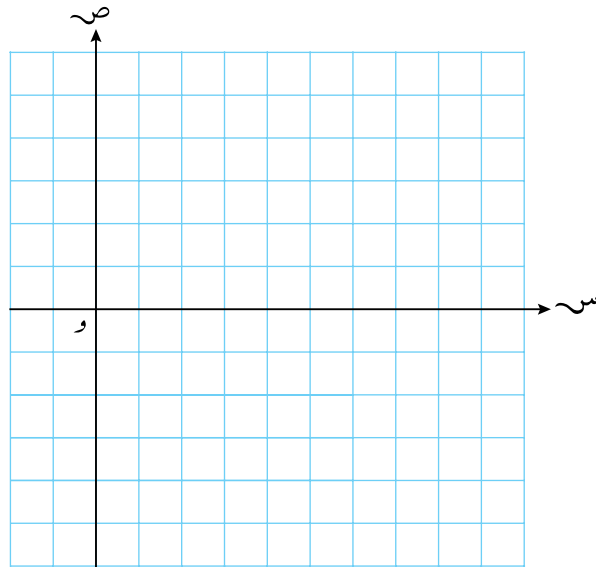
هناك فرق بين جتا (ق س)،
ق جتا (س)



★ (٥) التمثيل البياني المجاور يمثل بيان الدالة:

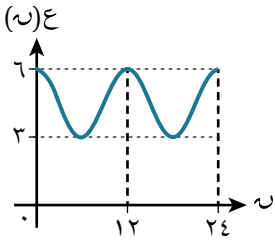
ص = ل جا (ق س)، حيث $0 \leq س \leq 2\pi$ ،
أوجد قيمتي ل، ق.

(٦) أ. على المستوى الإحداثي نفسه، ارسم بيان الدالتين ص = ١ + جا ٢ س،
ص = ٢ جتا س، حيث $0 \leq س \leq 2\pi$.



ب. اذكر عدد حلول المعادلة $١ + جا ٢ س = ٢ جتا س$ ، حيث $0 \leq س \leq 2\pi$.

ج. اذكر عدد حلول المعادلة $١ + جا ٢ س = ٢ جتا س$ ، حيث $-\pi/6 \leq س \leq \pi/6$.



٧ ★ يبيّن التمثيل البياني المجاور العلاقة بين ارتفاع مستوى الماء تحت جسر، والزمن s (بالساعات). وفقاً للعلاقة $E(s) = 3 + A \cos(Bs)$ أوجد قيم A ، B ، C .

٨ أوجد أعلى قيمة وأقل قيمة لـ C ، وقيم s الموجبة المناظرة لأعلى قيمة، وأقل قيمة في كل مما يأتي:

ب $C = 5 - 4 \cos(s + 30^\circ)$

أ $C = 1 + \cos(2s)$

د $C = \frac{12}{3 + \cos s}$

ج $C = 29 - 20 \cos(3s - 45^\circ)$

٥-٢ الدوال المثلثية العكسية Inverse trigonometric functions

تمارين ٥-٢

مساعدة

مجال $\sin^{-1} x$ هو:

$$-1 \leq x \leq 1$$

ومداها هو:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

مجال $\cos^{-1} x$ هو:

$$-1 \leq x \leq 1$$

ومداها هو:

$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$$

مجال $\tan^{-1} x$ هو:

ومداها هو:

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

١) اكتب بالدرجات زاوية الأساس لكل ممّا يأتي:

ب ظلّ 1

أ جتا $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

د ظلّ $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ج جتا (0)

و جتا (-1)

ه ظلّ $(-\sqrt{3})$

ه جتا (-1)

ز ظلّ (-1)

٢) اكتب زاوية الأساس لكل ممّا يأتي بدلالة π :

ب جتا $(0, \pi)$

أ جتا $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

د ظلّ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ج جتا $(0, \pi)$

(٣) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ $\text{جا}^{-1}(٠, ٥)$

ب $\text{جتا}^{-1}(١-)$

ج $\text{ظا}^{-1}(\sqrt{٣})$

د $\text{جتا}^{-1}(٠)$

(٤) أوجد كلاً مما يأتي:

أ $\text{جتا}^{-1}(\text{جتا } \frac{\pi}{٢})$

ب $\text{جا}^{-1}(\text{جا } \frac{\pi}{٢})$

ج $\text{ظا}^{-1}(\text{ظا } \frac{\pi}{٢})$

د $\text{جتا}^{-1}(\text{جتا } \pi)$

(٥) أوجد مجال ومدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ $\text{ص} = \text{ظا}^{-1}(٣\text{س})$

ب $\text{ص} = \text{جتا}^{-1}(\text{س}) - ٢$

- (٦) إذا علمت أن الدالة $D(s) = 3 + 2s$ معرفة في المجال $\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد:
- أ مدى الدالة $D(s)$.
 ب $D^{-1}(s)$.

- (٧) إذا علمت أن الدالة $D(s) = 4 - 3s$ ، حيث $0 \leq s \leq \pi$ ، فأوجد مدى الدالة $D(s)$.

- (٨) الدالة $D(s) = 5 - 2s$ حيث $\frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi$ ،
- أ أوجد أكبر قيمة لـ k عندما تكون للدالة $D(s)$ دالة عكسية.

- ب مستخدماً الإجابة في الجزئية (أ)، أوجد $D^{-1}(s)$ واذكر مجالها.

٦-٢ المعادلات المثلثية Trigonometric equations

تمارين ٦-٢

مساعدة



تُقاس الزوايا الموجبة بدءاً من الجزء الموجب من المحور السيني وبمعكس اتجاه عقارب الساعة.

- الزوايا بين 0° ، 90° تقع في الربع الأول.
- الزوايا بين 90° ، 180° تقع في الربع الثاني.
- الزوايا بين 180° ، 270° تقع في الربع الثالث.
- الزوايا بين 270° ، 360° تقع في الربع الرابع.

(١) حل كل معادلة من المعادلات الآتية:

$$(١) \text{ أ } 1 + 2 \text{ جا } \theta = 1, 2, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$(٢) 3 + 4 \text{ جا } \theta = 2, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$(١) \text{ ب } 1 - 3 \text{ جتا } \theta = \frac{1}{3}, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$(٢) 2 + 5 \text{ جتا } \theta = 4, 7, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$(١) \text{ ج } 1 - 3 \text{ ظا } \theta = 4, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$(٢) 3 - 5 \text{ ظا } \theta = 8, \text{ حيث } 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

(٢) حل المعادلة (ظا $\theta + 1$) (5 جا $\theta - 2$) = 0، حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ،

$$\text{س} \neq 90^\circ, \text{س} \neq 270^\circ$$

(٣) أوجد قيم h في الفترة $360^\circ > h > 360^\circ$ عندما $3 \cos \left(\frac{h}{2} \right) - 2 = 0$

(٤) حل المعادلة $2 \cos \left(\frac{h}{3} \right) = 5$ ، حيث $0^\circ > h > 540^\circ$

(٥) أوجد قيم s في الفترة $360^\circ > s > 360^\circ$ عندما $2 \cos (2s + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0$

(٦) حل المعادلة $2 \cos (3s - 50^\circ) - \sqrt{2} = 0$ ، حيث $0^\circ > s > 90^\circ$

(٧) أوجد قيم s في الفترة $180^\circ > s > 180^\circ$ عندما $\cos s = \frac{1}{2}$

(٨) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $0^\circ \leq s \leq 360^\circ$ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

(٢) $3 \cos^2 s = 5$

(١) $3 \cos^2 s = 2$

مساعدة



الجذر التربيعي
توجد له قيمتان:
قيمة موجبة وقيمة
سالبة.

ب (١) $٠ = ٦ - \text{ظا س} - \text{ظا س}^٢$

٢ (٢) $٠ = ٢ - \text{جتا س} + \text{جتا س}^٢$

ج (١) $٠ = ٦ + \text{جتا س} - ١١ \text{جتا س}^٢$

٢ (٢) $٠ = ٨ - \text{جا س} + ٦ \text{جا س}^٢$

د (١) $٠ = \text{جا س} + ٣ \text{جا س}^٢$

٢ (٢) $٠ = ٥ \text{ظا س} + ٤ \text{ظا س}^٢$

٩ حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $١٨٠^\circ \geq \text{هـ} \geq ١٨٠^\circ$ مقرباً الناتج إلى أقرب ٣ أرقام معنوية:

أ (١) $٠ = ٢ \text{جا هـ} - ٥ \text{جا هـ} \times \text{جتا هـ}$

٢ (٢) $٠ = ٤ \text{جتا هـ} + ٥ \text{جا هـ} \times \text{جتا هـ}$

ب (١) $٠ = ٤ \text{جا هـ} \times \text{جتا هـ} = \text{جتا هـ}$

مساعدة



جا س تعني (جا س)^٢

(٢) $3\text{جا ه} = 5\text{جا ه} \times \text{جتا ه}$

(١٠) حل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $0^\circ \leq \text{ه} \leq 360^\circ$ مقررًا الناتج إلى أقرب منزلة عشرية واحدة:

أ $4\text{جا}^2 \text{ه} - 1 = 0$

ب $2\text{جا}^2 \text{ه} + 2\text{جتا}^2 \text{ه} = 2$

ج $10\text{جا}^2 \text{ه} - 5\text{جتا}^2 \text{ه} + 2 = 4\text{جا ه}$

د $4\text{جا}^2 \text{ه} \times \text{جتا ه} = \text{ظا}^2 \text{ه}$

٧-٢ المتطابقات المثلثية Trigonometric identities

تمارين ٧-٢

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

١ جـ $\text{جا}^2 3 + \text{جتا}^2 3 (\text{س})$

ب جـ $\text{جا}^2 5 + \text{جتا}^2 5 (\text{س})$

ج $2 - \text{جتا}^2 2 (\text{س}) - \text{جا}^2 2 (\text{س})$

د $\frac{3}{\text{جتا}^2 4 (\text{س})} - \frac{3}{\text{جا}^2 4 (\text{س})}$

(٢) اكتب $\text{جا}^2 3 \text{س} + \text{جتا}^2 4 \text{س}$ بدلالة جا س .ب اكتب $\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}$ بدلالة جتا س .

(٣) ★ أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

١ ا $2 \equiv (\text{جا س} + \text{جتا س})^2 + (\text{جا س} - \text{جتا س})^2$

٢ $5 \equiv (\text{جا}^2 2 \text{س} + \text{جا س}) + (\text{جتا}^2 2 \text{س} - \text{جتا س})$

ب ١ $\frac{1}{\text{جتا هـ}} \equiv \text{جا هـ} \times \text{ظا هـ} + \text{جتا هـ}$

$$(٢) \quad \frac{\text{جتا}^2 \text{هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{١}{\text{جا هـ}} - \text{جا هـ}$$

(٤) اكتب كلاً ممّا يأتي بدلالة جتا س:

$$\text{ب} \quad \frac{١}{١ + \text{ظا}^2 \text{س}}$$

$$\text{أ} \quad ٢ - ٢ \text{ظا}^2 \text{س}$$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

$$(٥) \quad \text{بسّط العبارة} \left(\frac{١}{\text{جا س}} + \frac{١}{\text{ظا س}} \right) \left(\frac{١}{\text{جا س}} - \frac{١}{\text{ظا س}} \right)$$

$$\star (٦) \quad \text{بيّن أن } ٢ \text{ظا}^2 (٢ \text{س}) - \frac{٢}{\text{جتا}^2 (٢ \text{س})} = \text{ك لكل قيم س، وأوجد قيمة ك.}$$

$$\star (٧) \quad \text{أثبت المتطابقة: } \frac{١}{\text{جتا هـ}} - \text{جتا هـ} \equiv \text{جا هـ} \times \text{ظا هـ.}$$

☆ ٨) استخدم المتطابقتين: $\frac{\text{جا ه}}{\text{جتا ه}} \equiv \frac{\text{ظا ه}}{\text{جتا ه}}$ ، حيث $\text{جتا ه} \neq 0$ ، جتا ه + جا ه $\equiv 1$ لتبين كلاً مما يأتي:

أ $\frac{1 - \text{جتا ه}}{\text{جا ه}} \equiv \frac{1}{\text{ظا ه}} - \frac{1}{\text{جا ه}}$

ب $\frac{\text{جا ه}^2}{1 - \text{جتا ه}} \equiv 1 + \text{جتا ه}$

ج $\frac{\text{جتا ه}}{\text{جتا ه} - 1} \equiv \frac{1}{\text{جتا ه}} + \text{ظا ه}$

د $\frac{1}{\text{جتا ه}} + 1 \equiv \frac{\text{ظا ه} \times \text{جا ه}}{1 - \text{جتا ه}}$

٨-٢ المزيد من المعادلات المثلثية More trigonometric equations

تمارين ٨-٢

(١) استخدم المتطابقة $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \equiv \tan \theta$ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$:

(ب ١) $\tan \theta = 2$ $\tan \theta = 3$ $\tan \theta = 5$ (٢)

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(ب ١) $\tan \theta = 7$ $\tan \theta = 3$ $\tan \theta = 5$ (٢)

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(٢) استخدم المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \equiv 1$ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$:

(ب ١) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 5$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2$ (٢)

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(ب ١) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1$ $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 1$ (٢)

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(٣) أوجد قيم θ في الفترة $0^\circ < \theta < 360^\circ$ عندما $\sin \theta = \frac{1}{2}$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$

(٤) حل المعادلة $جا^2 س + جتا س = \frac{جا^2 س}{جتا س}$ ، حيث $٠ \leq س \leq ٣٦٠^\circ$

(٥) حل المعادلة $جا س \times ظا س = جا^2 س$ ، حيث $٠ \leq س \leq ١٨٠^\circ$

(٦) حل المعادلة $٥ جا^2 ه = ٤ جتا^2 ه$ ، حيث $٠ \leq ه \leq ١٨٠^\circ$ مقرباً الإجابة إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

(٧) حل المعادلة $٢ جتا^2 ن - جا ن - ١ = ٠$ ، حيث $٠ \leq ن \leq ٣٦٠^\circ$

(٨) أوجد قيم س في الفترة $٠ \leq س \leq ١٨٠^\circ$ التي تحقق $٤ جتا^2 س - ٥ جا س - ٥ = ٠$

(٩) إذا علمت أن $٦ جا^2 س + جتا س = ٤$ ، فأوجد قيم جتا س.

ب حل المعادلة $6\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا س} = 4$ ، حيث $0^\circ \leq \text{س} \leq 360^\circ$ إلى أقرب 3 أرقام معنوية.

☆ (10) i بيّن أن المعادلة $2\text{جا}^2\text{س} - 3\text{جا س} \times \text{جتا س} + \text{جتا}^2\text{س} = 0$ يمكن كتابتها في صورة $2\text{ظا}^2\text{س} - 3\text{ظا س} + 1 = 0$

ب حل المعادلة $2\text{جا}^2\text{س} - 3\text{جا س} \times \text{جتا س} + \text{جتا}^2\text{س} = 0$ مبيّنًا كل الحلول عندما $-180^\circ < \text{س} < 180^\circ$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثانية

(١) أ إذا علمت أن الزاوية أ منفرجة، جا أ = $\frac{\sqrt{5}}{14}$ ، فأوجد قيمة جتا أ.

ب إذا علمت أن $180^\circ > \text{ب} > 360^\circ$ ، ظا ب = $-\frac{21}{4}$ ، فأوجد قيمة جتا ب.

ج أوجد كل القيم الممكنة ل جا ه إذا علمت أن جتا ه = $\frac{1}{4}$

د أوجد كل قيم د إذا علمت أن $-180^\circ > \text{د} > 180^\circ$ ، ظا د = 5 جا د.

(٢) حل كل معادلة من المعادلات الآتية مبيِّناً كل الحلول عندما $0^\circ > \text{ه} > 360^\circ$:

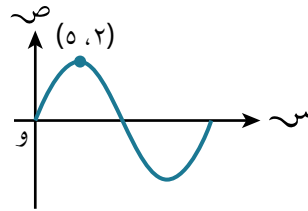
أ جا ه = ظا ه ب $2 - 2 \text{ جتا ه} = \text{جا ه}$

ج $2 \text{ ظا ه} - 2 \text{ ظا ه} = 1$ د $3 \text{ جتا ه} - 2 \text{ جتا ه} = 0$

(٣) أوجد قيم س في الفترة $0^\circ > \text{س} > 720^\circ$ إذا علمت أن $2 \text{ جتا} \left(\frac{1}{4} \text{ س} + 45^\circ\right) = \sqrt{3}$

(٤) ما عدد حلول المعادلة $\sin^2 s = \frac{1}{4}$ في الفترة $-180^\circ < s < 180^\circ$ ؟

(٥) بيّن الشكل الآتي بيان الدالة $D(s) = A$ جا $(B s)$ ، حيث s بالراديان. أوجد قيمتي A ، B .



(٦) ★ أثبت المتطابقة $\frac{2}{\sin^2 s} - \tan^2 s \equiv 2 + \tan^2 s$.

(٧) أوجد كل قيم s في الفترة $-90^\circ < s < 90^\circ$ التي تحقق $6 \tan^2 (2s) \equiv \tan^2 (s) + 4$

(٨) أوجد قيم k عندما يكون للمعادلة $\sin^2 s - k s + 1 = 0$ جذر متكرر.

ب) بيّن أن المعادلة $٤جا^٢هـ = ٥ - ك$ جتا هـ يمكن كتابتها في صورة $٤جتا^٢هـ - ك$ جتا هـ $+ ١ = ٠$

٩) إذا علمت أن $ل = ظا س$ ، فعبّر عن كل ممّا يأتي بدلالة ل:

ب) $جا^٢س$

أ) $جتا^٢س$

د) $١ + \frac{٢}{جا^٢س}$

ج) $جتا^٢س - جا^٢س$

الوحدة الثالثة

مقدمة في النهايات والاتصال

Introduction to limits and continuity

ستتعلم في هذه الوحدة كيف:

- ١-٣ تتعرف على مفهوم نهاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من a عددياً، وبيانياً.
- ٢-٣ تتذكر وتطبق خواص النهايات.
- ٣-٣ تجد نهايات الدوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية (بسطها ومقامها كثيرة حدود)، والدوال المعرفة بأكثر من قاعدة باستخدام خواص النهايات.
- ٤-٣ تفهم وتحدد باستخدام جداول القيم، وجبرياً، وبيانياً مفهوم نهاية الدالة $f(x)$ عند اللانهاية للدالة النسبية.
- ٥-٣ تحدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة أو على فترة مغلقة.

١-٣ نهاية الدالة عند نقطة Limit of the function at a Point

١-٣ أ نهاية الدالة كثيرة الحدود Limit of polynomial function

تمارين ١-٣ أ

(١) اكتب كلاً من العبارات الآتية باستخدام صيغة النهاية:

أ قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من ١ كلما اقتربت قيمة x من ٣ من جهة اليمين.

ب عندما تقترب القيم المتزايدة لـ x من الصفر، تقترب قيمة الدالة $f(x)$ من ١.

ج تقترب الدالة $f(x)$ من ٦ عندما تتناقص قيم x لتقترب من ٢.

د عندما تؤول س إلى ٩ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيمة الدالة ر(س) تؤول إلى ٢٩

٢ عبّر لفظيًا عن معنى كل نهاية من النهايتين الآتيتين:

ب نهـاـة (س) هـ = ١
س ← ١+

أ نهـاـة (س) د = ٨
س ← ٧

٣ أكمل الجدولين الآتيين لتقدر قيمة نهـاـة (س) ع، حيث ع(س) = ١٢ - س - س^٢:

من جهة اليمين	
س	ع(س)
٣,٥	٣,٧٥-
٣,١	
٣,٠٥	
٣,٠١	

من جهة اليسار	
س	ع(س)
٢,٥	٣,٢٥
٢,٩	
٢,٩٥	
٢,٩٩	

(٤) أنشئ الجدول لتقدير قيمة نهاية $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{s}$ ، حيث $q(s) = s^2 + 3s^2 - 8s + 5$

(٥) استخدم الجدول لتقدير قيمة نهاية $\lim_{s \rightarrow -27} \frac{1}{s}$ ، حيث $d(s) = \frac{s}{3} + 10$

١-٣ ب نهاية الدالة النسبية Limit of a rational function

تمارين ١-٣ ب

$$(١) \text{ لتكن الدالة د(س) = } \frac{٢١ + ٤س - س^٢}{٣ + س} :$$

أ بيّن أن الدالة د(س) غير معرّفة عند $س = -٣$ ، اشرح إجابتك.

ب استخدم الجداول لإيجاد نهاية د(س) عندما تقترب س من -٣ من جهة:

(١) اليسار.

(٢) اليمين.

ج بيّن سبب وجود نهاية للدالة د(س) عند $س = -٣$

(٢) لتكن الدالة هـ(س) = $\frac{٧س - ٤س^٢}{س}$:

أنشأت خديجة الجدولين الآتيين لمعرفة نهاية الدالة هـ(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، ومن جهة اليسار:

من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	هـ(س)	س	هـ(س)
٠,٥	أ	٠,٥-	ج
٠,١	٦,٩٦	٠,١-	٦,٩٦
٠,٠١	٦,٩٩٩٦	٠,٠١-	٦,٩٩٩٦
٠,٠٠١	ب	٠,٠٠١-	د

أ احسب قيم كل من أ، ب، ج، د.

ب استخدم النتائج من الجدولين لتقدّر قيمة نهاـ هـ(س).
س ←

(٣) لتكن الدالة ف(س) = $\frac{٢}{س} + ١١$:

أ أكمل الجدولين الآتيين مبيناً قيم ف(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليمين، ومن جهة اليسار:

من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	ف(س)	س	ف(س)
٠,١	٤١	٠,١-	
٠,٠٥		٠,٠٥-	٤٩-
٠,٠١		٠,٠١-	٢٨٩-
٠,٠٠٥		٠,٠٠٥-	٥٨٩-
٠,٠٠١		٠,٠٠١-	٢٩٨٩-
٠,٠٠٠٥	٦٠١١	٠,٠٠٠٥-	

ب هل يمكن إيجاد قيمة للنهائيتين الآتيتين؟ فسّر إجابتك.

(١) نهـا ف(س) ←₊

(٢) نهـا ف(س) ←₋

ج ماذا تستنتج حول نهـا ف(س)؟ ←₊

د اكتب معادلة خط التقارب الرأسي لمنحنى الدالة $v = 11 + \frac{3}{s}$

(٤) لتكن الدالة د(س) = $\frac{s^2 - 4}{s - 2}$:

أ ما قيمة س التي تكون عندها د(س) غير معرفة؟

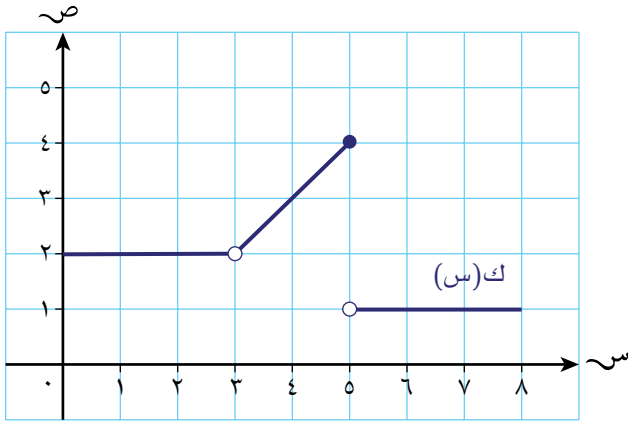
ب ما هي إحداثيات الفجوة في منحنى الدالة د(س)؟

(٥) إذا علمت أن منحنى الدالة $D(s) = \frac{s^2 - 25}{s - 5}$ هو مستقيم ميله ١، ومقطعه من المحور الصادي ٥، ويتضمن فجوة عند النقطة (أ، ب). فأوجد قيمتي أ ، ب.

(٦) إذا علمت أن منحنى الدالة $D(s) = \frac{s(s^2 + s - 42)}{s^2 - 6s}$ هو مستقيم يتضمن فجوتين، فأوجد إحداثيات النقطتين حيث توجد الفجوتان.

١-٣ ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة Limit of a piecewise function

تمارين ١-٣ ج

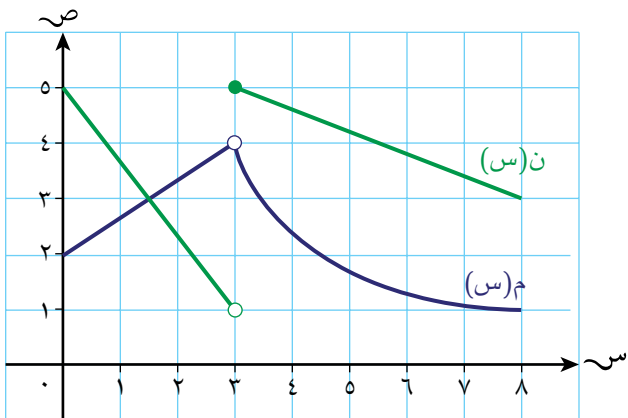


(١) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة ك(س) في المجال $0 \leq x \leq 8$:

صف باستخدام الرموز الرياضية سلوك الدالة من حيث إنها: معرّفة أم لا، نهايتها موجودة أم لا، عندما:

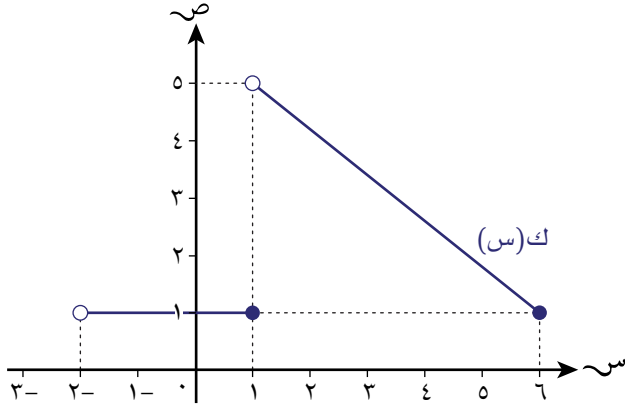
أ $x = 3$

ب $x = 5$



(٢) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالتين م(س)، ن(س) في المجال $0 \leq x \leq 8$

صف باستخدام الرموز الرياضية، أوجه التشابه وأوجه الاختلاف بين قيمتي الدالتين، ونهايتهما عند $x = 3$



٣) يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة $f(s)$ المعرفة بأكثر من قاعدة:

إليك خمس عبارات كتبها الطلبة حول المنحنى $f(s)$.

يوجد خطأ واحد في كل عبارة. أعد كتابة كل عبارة مصححاً الخطأ.

أ) يبيّن الرسم الدالة في المجال

$$-2 < s < 6$$

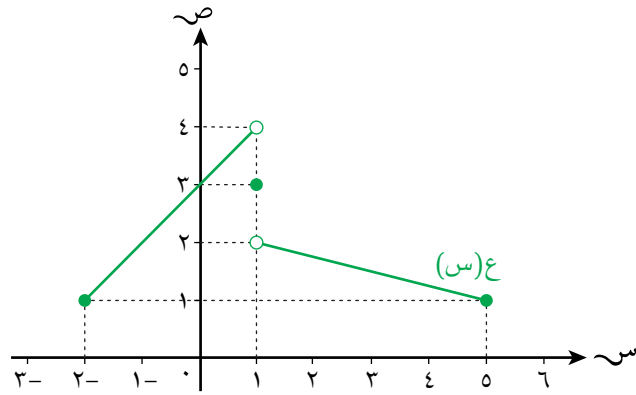
ب) $f(s) = 1$ في المجال $-2 < s \leq 6$

ج) $f(s) = -\frac{4}{5}s + \frac{27}{5}$ في المجال $1 < s \leq 6$

د) نهـ $f(s) = 1$ ، ولكن نهـ $f(s)$ غير موجودة.

هـ) نهـ $f(s) = \frac{5+1}{2} = 3$

٤) بيّن الرسم أدناه منحنى الدالة $g(s)$ (س) المعرفة بأكثر من قاعدة:



أ) استخدم المنحنى لتجد كلاً ممّا يأتي:

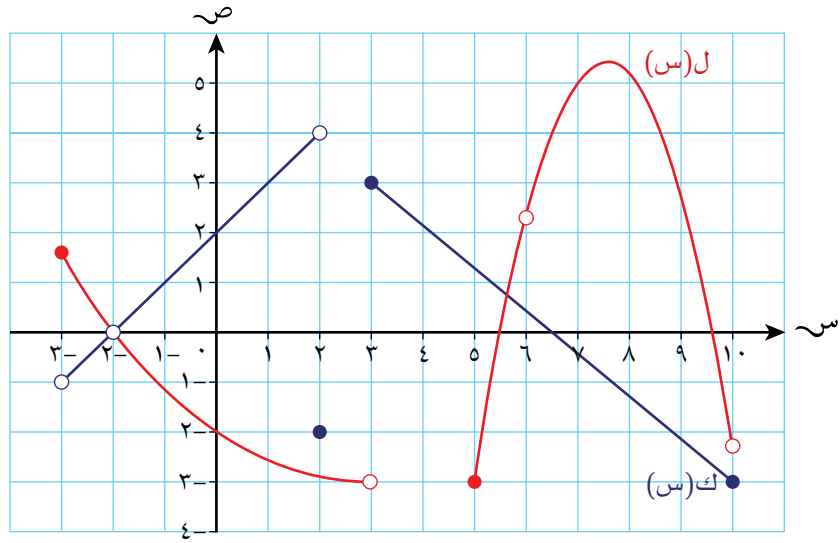
(١) $g(1)$

(٢) نهـ $g(s)$ $s \leftarrow 1$

(٣) نهـ $g(s)$ $s \leftarrow +1$

ب) ما الخلاصة التي يمكن أن تستجها من الجزئية (أ) ذات صلة بـ نهـ $g(s)$ $s \leftarrow 1$ ؟

(٥) بيّن الرسم أدناه منحنى كل من الدالتين $ل(س)$ ، $ك(س)$:



أ أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

(١) $ك(٢)$

(٢) نهـ $ك(س)$ $س \leftarrow -٢$

(٣) نهـ $ل(س)$ $س \leftarrow -٣$

(٤) نهـ $ل(س)$ $س \leftarrow +٥$

ب) انسخ العبارات الآتية، واستخدم المتباينات لإكمال كلٍّ منها:

١) ل (س) غير معرّفة على الفترة ٣ ... س ... ٥

٢) ك (س) غير معرّفة على الفترة ٢ ... س ... ٣

ج) أوجد كل قيم س الصحيحة في المجال $-3 < س < 10$ ، حيث يكون كل مما يأتي غير موجود:

١) نهاية ل (س).

٢) نهاية ك (س).

٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س ← ∞±)

Limit of a rational function at infinity

تمارين ٢-٣

(١) أوجد نهاية كلٍّ مما يأتي عندما (س ← ∞±):

أ) د(س) = $\frac{1}{س} + ٨$

ب) د(س) = $٢ - \frac{٩}{س٢}$

ج) د(س) = $\frac{٦س٥ + ٧}{١٠س - ٧}$

د) د(س) = $\frac{٦س٢}{٢س٢ - ٥}$

هـ) د(س) = $\frac{٩١س٢ - ٤٣س}{١٣س٢ - ١}$

و) د(س) = $\frac{٢٠س٤ - ٩س٢ + ٤س}{٥س٣ - ٨س٢ + ٤س}$

ز) د(س) = $\frac{٩س٢}{س - ٢}$

ح) د(س) = $\frac{س - ٢}{٩س٢}$

ط) د(س) = $\frac{٤س٣ + ٥}{٢س٢} - ٥$

ي) د(س) = $\frac{(١ + س)(س - ١)}{٢س٢}$

(٢) لتكن د(س) = $\frac{٥}{١ - س} - \frac{٣س}{١ + س}$:

أ) اكتب العبارة $\frac{٥}{١ - س} - \frac{٣س}{١ + س}$ في صورة كسر.

ب أوجد نهاية الدالة د(س) عندما (س ← ∞).

٣ إذا علمت أن نهـ $\frac{6 + 2س - (3 - س)^2}{س^2 - 9}$ ، فأوجد القيم الممكنة لـ ب.

٤ إذا علمت أن نهـ $\frac{3س^3 - 7س^2}{\frac{كس^3}{3} - 13}$ ، فأوجد قيمة ك.

٣-٣ خواص النهايات properties of limits

تمارين ٣-٣

(١) استخدم خواص النهايات لتقدّر كلاً ممّا يأتي علماً بأن نهـا (س) د = ٢، نهـا (س) هـ = ٦ :
 $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{d(s)}{h(s)}$

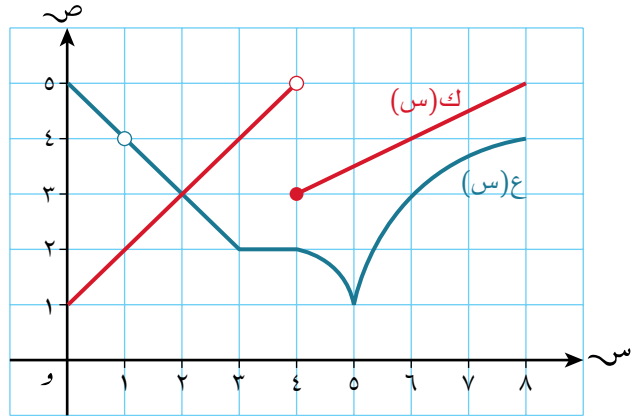
أ نهـا (س) هـ (س) د
 $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{h(s)}{d(s)}$

ب نهـا (س) هـ (س) د - (س) د
 $\lim_{s \rightarrow 1} (h(s) - d(s))$

د نهـا (س) هـ (س) د × (س) د
 $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} h(s) \times d(s) \right)$

ج نهـا (س) هـ (س) د
 $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2} (h(s) - d(s))$

(٢) بيّن الرسم البياني الآتي جزءاً من منحنى الدالتين ع(س)، ك(س):



استخدم الرسم أعلاه لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي إن أمكن:

ب نهـا (س) هـ (س) د + (س) ك
 $\lim_{s \rightarrow 5} (h(s) + k(s))$

أ نهـا (س) هـ (س) د - (س) ك
 $\lim_{s \rightarrow 6} (h(s) - k(s))$

د) نهـا $\frac{ع(س)}{ك(س)}$ س ← ١

ج) نهـا $\frac{ع(س) \times ك(س)}{٤}$ س ← ٤

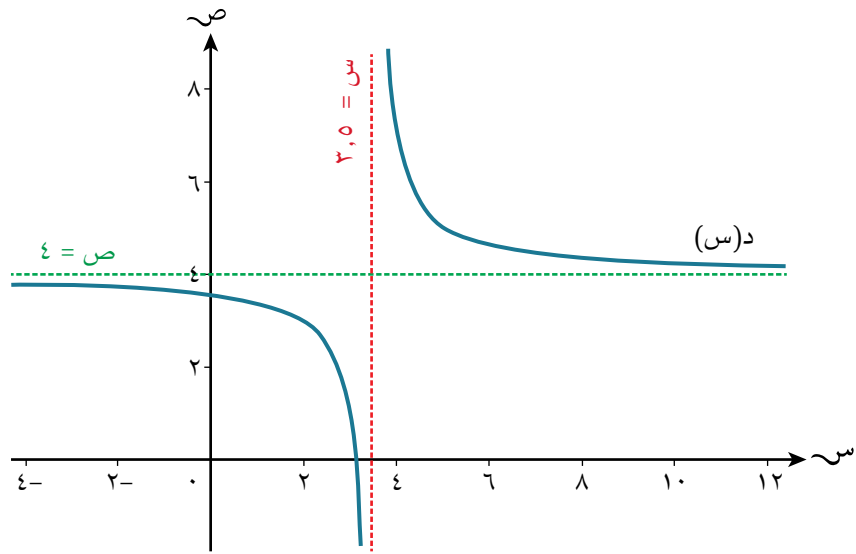
هـ) نهـا $\frac{١}{٢} \left(ع(س)^٢ \times ك(س)^٤ \right)$ س ← ٢

٣) إذا كانت نهـا $\frac{٢}{٢} = ٨$ د(س)، وكانت نهـا $\frac{٢}{٢} = ١٠$ هـ(س) موجودة،
فقدّر قيمة نهـا $\frac{١٠}{٢} = ١٠$ هـ(س).

٤) إذا علمت أن د(س)، هـ(س) دالتان خطيتان حيث نهـا $\frac{٤}{٢} = ٢٢$ د(س)،

نهـا $\frac{١}{١} = ١١$ هـ(س)، فأوجد قيمة نهـا $\frac{١١}{١٧} = ١١$ هـ(س) × د(س).

(٥) بيّن الرسم الآتي جزأين من منحنى الدالة $D(s) = \frac{25 - s}{s - 7}$ ، أوجد :



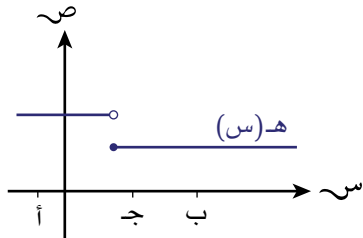
أ قيمتي أ ، ب .

ب قيمة نه $\lim_{s \rightarrow 1^-} D\left(\frac{3}{2}\right)$.

٣-٤ الاتصال Continuity

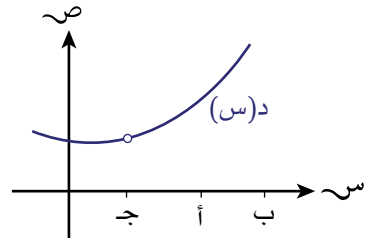
تمارين ٣-٤

(١) اذكر ما إذا كانت كل دالة من الدوال الآتية متصلة أو غير متصلة، مع ذكر السبب:



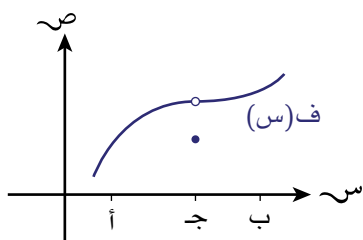
(١) عند $x = c$:

(٢) على الفترة $a \leq x \leq b$:



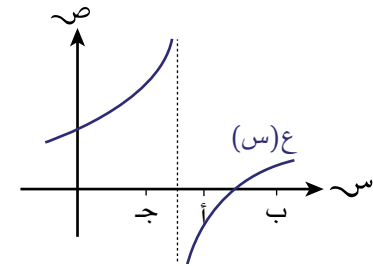
(١) عند $x = c$:

(٢) على الفترة $a \leq x \leq b$:



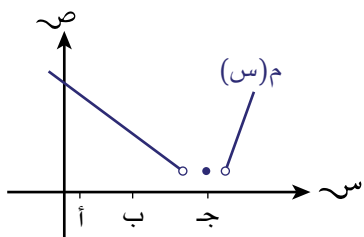
(١) عند $x = c$:

(٢) على الفترة $a \leq x \leq b$:



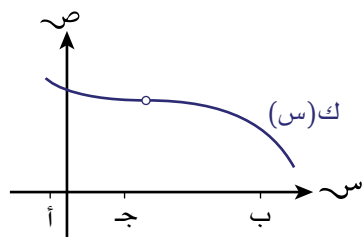
(١) عند $x = c$:

(٢) على الفترة $a \leq x \leq b$:



(١) عند $s = c$:

(٢) على الفترة $a \leq s \leq c$:



(١) عند $s = c$:

(٢) على الفترة $a \leq s \leq b$:

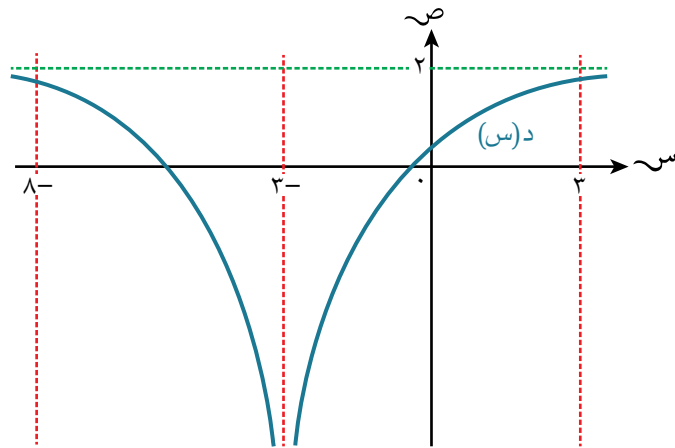
(٢) لتكن $f(x) = \frac{6}{x-2}$:

أ) اشرح السبب في أن الدالة $f(x)$ غير متصلة على الفترة $0 \leq x \leq 8$

ب) اكتب أي فترة مغلقة تكون الدالة $f(x)$ متصلة عندها.

(٣) بيّن أن الدالة $f(x) = \frac{12}{x^3 - 4}$ متصلة عند $s = 0$

٤) حصل أحمد على التمثيل البياني للدالة $D(s)$ ، ورسم عليه أربعة مستقيمات اعتبرها خطوط تقارب كما يبين الرسم أدناه:



إذا افترضنا أن التمثيل البياني للدالة $D(s)$ صحيح، فاكتب معادلة:

أ) الخطوط المستقيمة التي رسمها أحمد، مفترضاً بشكل خاطئ أنها خطوط تقارب.

ب) اكتب معادلتَي خطَي التقارب اللذين رسمهما أحمد بشكل صحيح، وشرح بإيجاز المعلومات التي يعطيها كل منهما عن قيم الدالة واتصالها.

٥) الدالة $H(s) = \frac{s-6}{s+11}$ متصلة على الفترتين $s > \infty$ ، $s \geq A$ ، $B \geq s > \infty$:

أ) اكتب:

١) أكبر قيمة ممكنة للعدد الصحيح أ.

٢) أصغر قيمة ممكنة للعدد الصحيح ب.

ب أوجد قيمة ج إذا علمت أن د(س) = $\frac{1}{هـ(س)}$ غير متصلة عند س = ج.

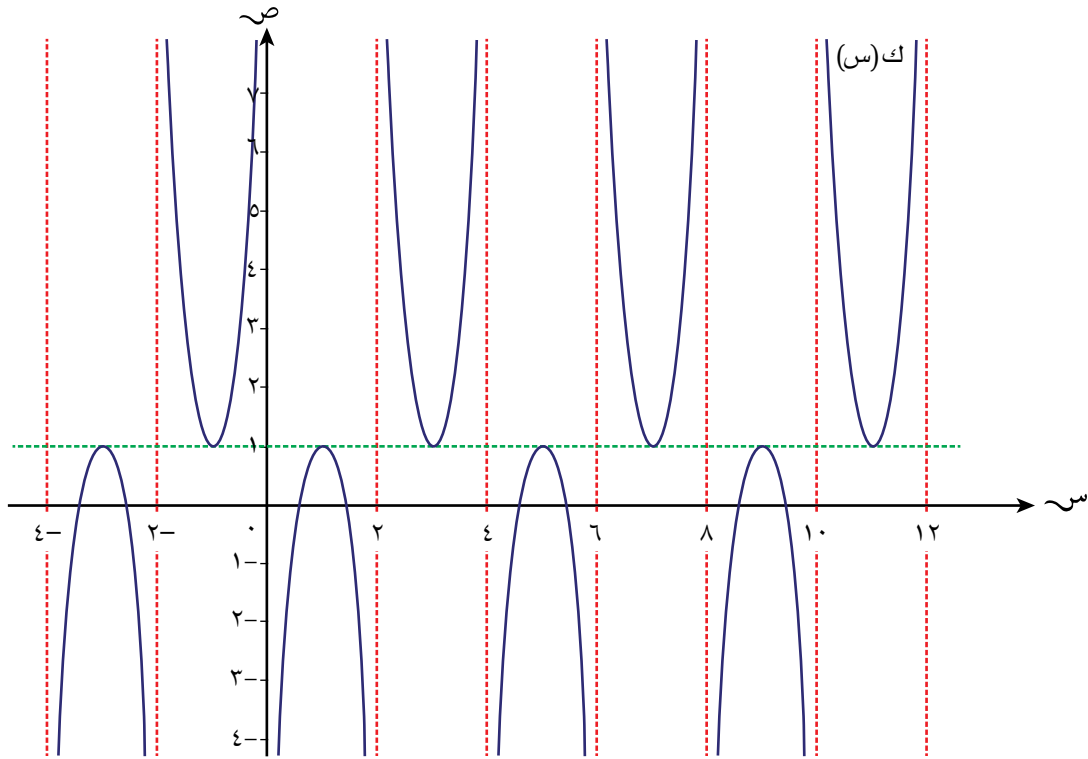
٦ أ أكمل الجدولين الآتيين اللذين يبيّنان قيم الدالة هـ(س) = $\frac{2}{3-س} - 4$ عندما تقترب س من ٣:

س	هـ(س)	س	هـ(س)
٢,٩	١٦-	٣,١	٢٤
٢,٩٩	١٩٦-	٣,٠١	٢٠٤
٢,٩٩٩		٣,٠٠١	
٢,٩٩٩٩		٣,٠٠٠١	

ب علام تدل القيم الموجودة في الجدول حول اتصال الدالة؟

ج إذا علمت أن نهـا هـ(س) = ف، فأوجد نهـا هـ(س).
س ← ∞ س ← ف

٧) بيّن الرسم الآتي أجزاء من منحنى الدالة ك(س):



أ) اكتب عدد النقاط التي تكون الدالة عندها غير متصلة على الفترتين الآتيتين:

(١) $12 \geq s \geq 6$

(٢) $2 \geq s \geq -4$

ب) حدّد ما إذا كانت الدالة ك(س) متصلة أو غير متصلة في كل فترة من الفترات الآتية:

(١) $1 \geq s \geq 1,99$ (٢) $-1,5 \geq s \geq -0,5$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

مساعدة



تذكر أن قيمة π هي ٣,١٤ أو $\frac{22}{7}$ تقريبًا.

(٣) $6,01 \leq s \leq 9,99$

(٤) $\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{3}$

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الثالثة

(١) إذا كانت هـ(س) = $\frac{س^2}{(س + ٥)(س - ٨)}$ ، فأوجد:

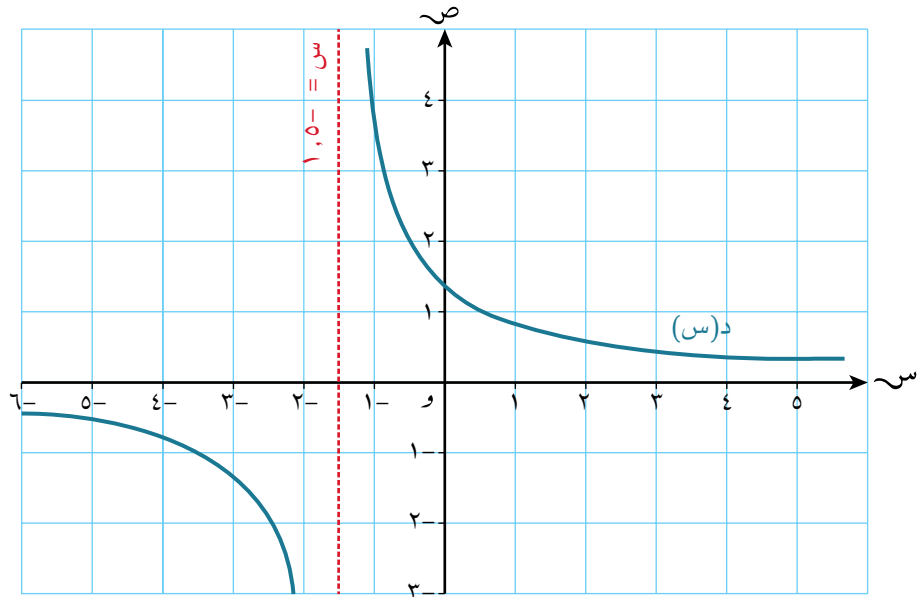
أ قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير متصلة في كل فترة من الفترتين:

$$(١) \quad ١٠ \geq س \geq ١$$

$$(٢) \quad ١٠- \geq س \geq ١-$$

ب نهاية الدالة عند $(س \leftarrow \infty \pm)$.

(٢) يبين الرسم الآتي جزأين من منحنى الدالة د(س) التي لمنحنائها خط تقارب رأسي معادلته $س = -٥$ ، ١ :



أ علام يدل خط التقارب الرأسي $س = -٥$ ، ١ ؟

ب إذا علمت أن د(س) = $\frac{4}{أ + ب س}$ ، وتمر بالنقطة (٤، ١-)، فأوجد قيمة كل من أ، ب.

ج استخدم جداول القيم لتبين أن الدالة د(س) متصلة عند س = ١

٣ استخدم جداول القيم لتبين أن الدالة هـ(س) = $\frac{٨}{س^٣ - ٢}$ متصلة عند س = ١ -

٤ لتكن هـ(س) = $\frac{١ + س^٣}{س^٢ - ١}$:

أ (١) استخدم أي طريقة مناسبة لتبين أن نهـ(س) غير موجودة.
س ← ٠,٥

٢ اكتب معادلة خط التقارب الرأسي لمنحنى الدالة هـ(س).

ب (١) أوجد نهاية $\frac{1}{s}$ هـ (س).
 $\infty \leftarrow s$

ب (٢) اكتب معادلة خط التقارب الأفقي للدالة هـ (س)

٥) بيّن الجدولان الآتيان بعض قيم الدالة د (س) = ١ + ٤ لـ س مقربة إلى أقرب ٣ منازل عشرية:

س	د (س)	س	د (س)
٥,٩	٨,١٠٠	٦,١	٨,٢٣٣
٥,٩٩	٨,١٦٠	٦,٠١	٨,١٧٤
٥,٩٩٩	٨,١٦٦	٦,٠٠١	٨,١٦٨
٥,٩٩٩٩	ب	٦,٠٠٠١	أ

أ أوجد قيمتي أ، ب الموجودتين في الجدولين مقرباً إلى أقرب ٣ منازل عشرية.

ب عبّر عن نهاية د (س) عندما تقترب س من ٦ باستخدام الرموز، وأوجد قيمتها.

٦) رسم محمود جداول قيم تبين أن نهاية $\frac{1}{s}$ د (س) = نهاية $\frac{1}{s+4}$ ر (س) = $\frac{1}{b}$ أ،

حيث ر (س) = $s^{-1} + \sqrt{s+5}$ ، س < ٥، أ، ب عدنان صحيحان. استخدم هذه المعلومات لإيجاد قيمة كل من أ، ب.

ستتعلم في هذه الوحدة كيف:

- ١-٤ تفهم (من خلال التمثيل البياني للدالة) أن ميل الدالة عند نقطة هو عبارة عن نهاية الميل لمتتالية مناسبة من المماسات عند تلك النقطة، وعلاقته بمشتقة الدالة؛ وتستخدم الصيغ د'(س)، د''(س)، $\frac{ك}{س}$ ، $\frac{ك^٢}{س^٢}$ ، $\frac{ك}{س}$ (ص) و $\frac{ك^٢}{س^٢}$ (ص) أو $\frac{ك}{س}$ $\left(\frac{ك}{س}\right)$ للمشتقتين الأولى والثانية.
- ٢-٤ تجد وتستخدم مشتقة لدوال في الصيغة د(س) = س^ن (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.
- ٣-٤ تجد وتستخدم مشتقة الدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث تكون الدوال المركبة في صورة س^ن (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال.
- ٤-٤ تجد وتستخدم ميل المماس أو المستقيم العمودي على منحنى الدالة، أو معادلة المماس، و/أو معادلة المستقيم العمودي لدوال في الصيغة د(س) = س^ن (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح للدوال، وللدوال المركبة باستخدام قاعدة السلسلة.
- ٥-٤ تجد وتستخدم المشتقة الأولى لتحديد قيم س التي تكون عندها الدالة في الصيغة د(س) = س^ن (لأي عدد نسبي ن)، مع الضرب في ثابت، والجمع والطرح، متزايدة، أو متناقصة.
- ٦-٤ تحدد النقاط الحرجة لدوال في الصيغة د(س) = س^ن (لأي عدد نسبي ن) مع الضرب في ثابت، الجمع، والطرح للدوال، وتستخدم المشتقتين الأولى والثانية لتحديد نوعها (طبيعتها).

١-٤ المشتقة وعلاقتها بالميل

Derivative and its relationship with gradient

تمارين ١-٤

١) تقع النقاط أ(٥٠، ٢)، ب(٢٥، ٤)، ج(٤٠، ٢ $\frac{١}{٢}$)، د(٥٠، ٢ $\frac{١}{٥}$)، هـ(٨٠، ٢ $\frac{١}{٨}$)، ز(١٠٠، ٢ $\frac{١}{١٠}$)، ح(١٠٠، ٢ $\frac{١}{١٠}$)

نرسم $\left(\frac{٢٠٠٠}{٤١}, ٢ \frac{١}{٢٠}\right)$ ، ج $\left(\frac{٥٠٠٠}{١٠١}, ٢ \frac{١}{٥٠}\right)$ على منحنى الدالة ص = ع(س):

أ أكمل الجدول الآتي:

الوتر	أ	ب	ج	د	هـ	ز	ح
الميل	$١٢ \frac{١}{٢}$						

ب استخدم القيم الموجودة في الجدول لتوقع قيمة $\frac{ك}{س}$ عند س = ٢

٢) أوجد قيمة ميل المماس لمنحنى كل دالة من الدوال الآتية عند كل نقطة من النقاط المعطاة باستخدام سلسلة من أميال الأوتار:

أ) $\text{ص} = \text{س}^2 - \text{س}$ عند $(2, 2)$.

ب) $\text{ص} = (2 + \text{س})^2$ عند $(25, 3)$.

ج) $\text{ص} = \sqrt{\frac{1}{\text{س}}}$ عند $(1, 4)$.

د) $\text{ص} = \frac{4}{\text{س}}$ عند $(1, 2)$.

٢-٤ مشتقة دالة القوة Differentiation of power functions

تمارين ٢-٤

(١) أوجد $\frac{d}{dx} x^k$ في كل ممّا يأتي:

أ (١) $\frac{d}{dx} x^2 =$ ص

ب (٢) $\frac{d}{dx} x^3 =$ ص

ج (١) $\frac{d}{dx} x^4 =$ ص

د (١) $\frac{d}{dx} x^{-1} =$ ص

هـ (١) $\frac{d}{dx} x^3 =$ ص

و (١) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} =$ ص

ز (٢) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{3}} =$ ص

ح (٢) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{4}} =$ ص

ط (٢) $\frac{d}{dx} x^{\frac{2}{5}} =$ ص

ي (٢) $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} =$ ص

مساعدة



(١) $\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$

= $\frac{d}{dx} x^k = kx^{k-1}$

(٢) $\frac{d}{dx} x^{\pm k} = \pm kx^{\pm k-1}$

= $\frac{d}{dx} x^{\pm k} = \pm kx^{\pm k-1}$

١ و ص $\frac{10}{\sqrt[5]{s}} =$

٢ ص $\frac{8}{\sqrt[4]{s^3}} =$

٢ أوجد د' (س) في كل ممّا يأتي:

١ أ د (س) = (س - ٣)(س + ٤)

٢ د (س) = ٣(س - ٥)

١ ب د (س) = $\sqrt[3]{s^4 + 3}$

٢ د (س) = $\sqrt[2]{s(1 - s)}$

١ ج د (س) = $(\sqrt[2]{s} + s^2)^2$

٢ د (س) = $(\sqrt[4]{s} - 4)^2$

١ د د (س) = $(\frac{1}{s} + s)^2$

٢ د (س) = $(\frac{2}{s} + s)(\frac{2}{s} - s)$

٣ أوجد مشتقة كلّ من الدوال الآتية:

١ ص $\sqrt[2]{s}$

٢ ص $(\sqrt{s} + 1)^2$

٣ ص $\frac{1}{\sqrt{s}} - s$

و ص = $\frac{1 + \sqrt{s} + s}{s}$

هـ ص = $s - \frac{1}{s}$

د ص = $s \left(\frac{1}{\sqrt{s}} - 1 \right)$

<hr/>	<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>	<hr/>

ح ص = $\frac{\sqrt{s} + s}{\sqrt{s}}$

ز ص = $\frac{(s+1)(s+2)}{s}$

<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>
<hr/>	<hr/>

٤ إذا علمت أن $\frac{9s^2 + 3}{2\sqrt{s}} = (s)$ ، فأوجد $d(s)$.

<hr/>
<hr/>
<hr/>

٥ إذا علمت أن $s = (s^2 - 1)(s - 3)$ ، فأوجد $\frac{d}{ds}$.

<hr/>
<hr/>
<hr/>

مساعدة



انتبه عند التعامل مع
الأعداد السالبة،
والأسس الكسرية.

مثلاً: $\frac{1}{\sqrt[3]{s}} = \frac{1}{s^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} s^{-\frac{1}{3}}$

٦ إذا علمت أن $3\sqrt{s} - \frac{2}{\sqrt{s}} = (s)$ ، فأوجد:

أ $d(s)$.

<hr/>
<hr/>
<hr/>
<hr/>
<hr/>

ب ميل المماس لمنحنى الدالة $D(s)$ عند $s = 4$

٧ إذا علمت أن $D(s) = s^3 + bs^2 + cs + d$ ، $D'(1) = 2$ ، $D''(1) = -2$ ، فأوجد قيمة كل من b ، c ، d

٨ أوجد إحداثيات النقطتين الواقعتين على منحنى الدالة $v = 2s^3 - 5s^2 + 9s - 1$ علمًا بأن ميل المماس عند كل منهما يساوي ١٣

٣-٤ قاعدة السلسلة The chain rule

تمارين ٣-٤

(١) استخدم قاعدة السلسلة لتجد مشتقة كل ممّا يأتي بدلالة س:

(١) أ $^{\circ}(٤ + س٣) = د(س)$ (٢) $^{\vee}(٤ + س٥) = د(س)$

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(١) ب $\sqrt[٢]{٢ - س٣} = ص$ (٢) $\sqrt[٢]{١ + س} = ص$

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(١) ج $\frac{١}{٣ - س} = د(س)$ (٢) $\frac{١}{٢(٣ + س٢)} = د(س)$

_____	_____
_____	_____
_____	_____

(٢) أوجد مشتقة كل ممّا يأتي:

(١) أ $^{\vee}(٣ + س٥) = ص$ (٢) ب $^{\frac{١}{٢}}(٣ + س٥) = ص$ (٣) ج $\frac{١}{٣ + س٥} = ص$

_____	_____	_____
_____	_____	_____

(٣) أوجد مشتقة كل ممّا يأتي:

(١) أ $^{\circ}(١ - س٤) = د(س)$ (٢) ب $^{\frac{١}{٢}}(١ - س٤) = ع(س)$ (٣) ج $\sqrt[٢]{١ - س٤} = هـ(س)$

_____	_____	_____
_____	_____	_____

(٤) أوجد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ص $(١ + س^٣)^٥$ ب ص $(١ + س^٣)^{-٤}$ ج ص $\sqrt[٣]{١ + س^٣}$

(٥) أوجد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ لك (س) $(٣ + ٢س^٢)^٦$ ب م (س) $\frac{١}{٣ + ٢س^٢}$ ج د (س) $\frac{١}{٢س - ١}$

(٦) إذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{٢س + ١}$ ، فأوجد:

أ د'(٢).

ب قيمة س عندما د'(س) = ٠

(٧) إذا علمت أن ص = $\sqrt[٤]{٨ + س^٣}$ ، فأوجد $\frac{ك ص}{ك س}$ عند س = ٢

(٨) أوجد مشتقة كل ممّا يأتي:

أ ص $(١ + س^٢ + س^٣)^٦$ ب ص $\frac{١}{٢(س^٥ + س^٣)}$

٤-٤ المماس والعمودي Tangent and normal

تمارين ٤-٤

- (١) إذا علمت أن معادلة أحد المماسين لمنحنى الدالة $v = 4s - s^2$ هي: $v = s - 2$ ، فأوجد معادلة المماس الثاني الموازي للمستقيم $v = s - 2$

- (٢) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $v = \sqrt{s}$ عند النقطة $(4, 2)$.

- (٣) أوجد معادلة العمودي على منحنى الدالة $v = s + \frac{1}{s}$ عند النقطة $(1, 2)$.

- (٤) يمر منحنيا الدالتين $v = s^2 - 2s$ ، $v = s^2 - 3s^2 - 2s$ بنقطة الأصل. بيّن أن المنحنيين لهما المماس نفسه عند تلك النقطة.

- (٥) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $v = s^2 - 3s^2 - 2s - 6$ عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع محور الصادات.

(٦) أوجد معادلتَي المماس والعمودي على منحنى الدالة $v = \sqrt[3]{s}$ ، عند النقطة $(8, 4)$.

(٧) إذا علمت أن المماس لمنحنى الدالة $v = \frac{1}{s}$ عند النقطة $(\frac{1}{4}, 4)$ يتقاطع مع المحورين السيني، والصادي في النقطتين ل، ك، فأوجد إحداثيات ل، ك.

(٨) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $v = (5 - s^2)^3$ عند النقطة $(2, -1)$.

(٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $v = \frac{1}{1 - \sqrt{s}}$ عند النقطة $(4, 1)$.

(١٠) أوجد معادلة العمودي على منحنى الدالة $v = \frac{8}{s - 1}$ عند النقطة $(-1, 4)$.

٥-٤ الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة Increasing and decreasing functions

تمارين ٥-٤

(١) أوجد د'(س)، والفترة التي تكون عندها د(س) متناقصة لكل مما يأتي:

أ) د(س) = $س^٢ + ٤س - ٩$ ب) د(س) = $س^٢ - ٣س - ٥$ ج) د(س) = $٥ - ٣س + س^٢$

_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____

د) د(س) = $س^٢ - ٨س + ٧$ هـ) د(س) = $٤ + ٧س - س^٢$ و) د(س) = $٣ - ٥س - س^٢$

_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____
_____	_____	_____

(٢) أ) (١) أوجد الفترة التي تكون عندها الدالة $ص = س^٢ - س$ متزايدة.

(٢) أوجد الفترة التي تكون عندها الدالة $ص = س^٢ + ٢س - ٥$ متناقصة.

ب) (١) أوجد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة $ص = س^٣ - ٣س$ متزايدة.

(٢) أوجد مجال قيم س التي تكون عندها الدالة $ص = س^٣ + ٢س^٢ - ٥$ متناقصة.

ج ١) أوجد الفترة التي تكون عندها دالة الميل لمنحنى الدالة $v = s^3 - s^2$ متناقصة.

٢) أوجد الفترة التي تكون عندها دالة الميل لمنحنى الدالة $v = s^2 - s^3$ متزايدة.

٣) أ) أوجد $\frac{v}{s}$ للدالة $v = \frac{3}{\sqrt{s}}$ عند $s = 9$

ب) هل دالة الميل متزايدة أم متناقصة عند $s = 9$ ؟

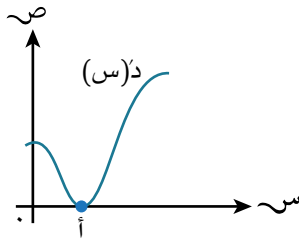
٤) بيّن أن الدالة $v = s^3 + s + 1$ متزايدة دائماً لجميع قيم $s > 0$.

٥) إذا علمت أن الدالة $d(s) = s^2 - 2s^3 - \frac{1}{3}s^4$ متزايدة على الفترة $0 < s < 1$ ، فأوجد قيمتي a ، b .

٦) أوجد مجال قيم s التي تكون عندها الدالة $v = s^3 - 6s^2 + 9s + 2$ متناقصة، ودالة ميلها متزايدة.

(٧) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $v = \sqrt{3} - s$ عند النقطة التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحور السيني.

ب هل المنحنى متزايد أم متناقص عند هذه النقطة؟ برّر إجابتك.



(٨) بيّن الشكل المجاور منحنى $v(s)$. أي من العبارات الآتية صحيح دائماً عند النقطة أ:

أ $v(s)$ لها نقطة صغرى.

ب $v(s)$ لها نقطة عظمى.

ج $v'(s) = 0$

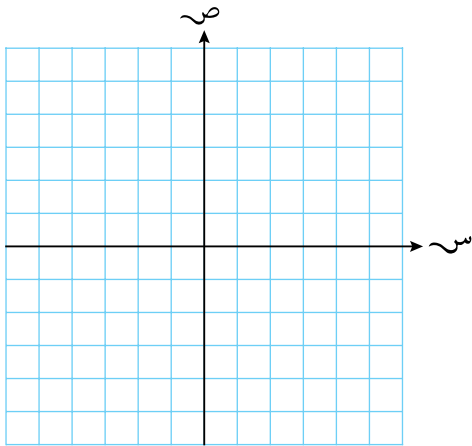
د $v''(s) = 0$

٦-٤ النقاط الحرجة Stationary points

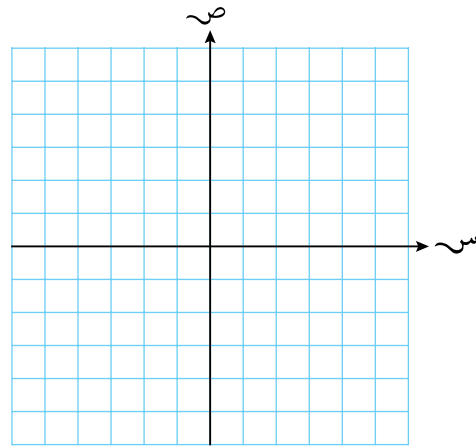
تمارين ٦-٤

(١) أوجد النقاط الحرجة للدوال الآتية، وحدد نوع كل منها، ثم ارسم منحناها (موضحًا النقاط الحرجة):

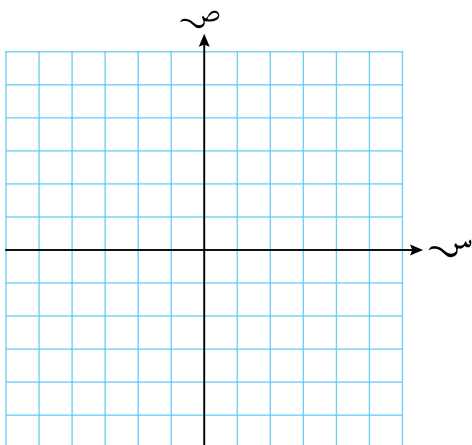
ب د(س) = $س^3 - ٣س^2 - ٤٥س + ٧$



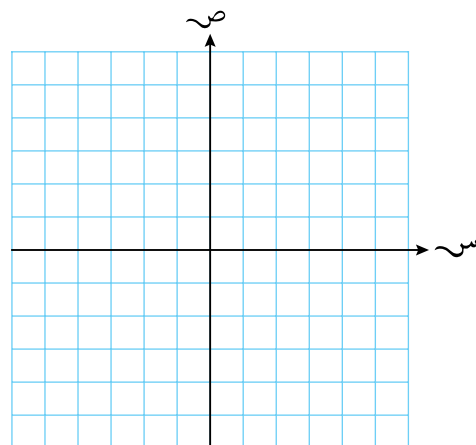
أ د(س) = $س^3 + ٣س^2 - ٧٢س + ٥$



د د(س) = $س^3 + ٣س^2 + ٣س + ١$



ج د(س) = $س^2 + س - ٤س^2$



☆ (٢) بيّن أن منحنى الدالة $v = s^2 - 3s^2 + 4s - 1$ ليس له نقاط عظمى أو صغرى.

(٣) لتكن $d(s) = \frac{1 + 9s^2}{s}$:

أ أوجد الإحداثي السيني للنقاط الحرجة على منحنى الدالة $d(s)$.

ب حدد ما إذا كانت كل من هذه النقاط نقطة عظمى أو نقطة صغرى.

(٤) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة $v = s - \sqrt{s}$ ، وحدد نوعها.

مساعدة



بالنسبة إلى التمرين ٥، اكتب المعادلة على أنها ناتج ضرب جذرين مكعبين، ثم ادمجهما.

(٥) أوجد إحداثيات النقاط الحرجة الواقعة على منحنى الدالة

$$v = 6s^2 - (\sqrt{3} - 7)s, \text{ وحدد نوعها.}$$

ب حدّد ما إذا كانت هذه النقاط عظمى أو صغرى.

(٦) إذا علمت أن لمنحنى الدالة $v = s^2 + 10s + k$ س - ٢ نقطة حرجة عند $s = -8$ ، فأوجد:

أ الإحداثي السيني للنقطة الحرجة الأخرى.

ب نوع كل من النقطتين الحرجتين.

(٧) تقع على منحنى الدالة $v = s^2 + b$ س - ٢ نقطة صغرى عند $s = -2$ ، ويمرّ المنحنى بالنقطة $(1, 13)$. أوجد أ، ب.

(٨) أوجد النقاط الحرجة الواقعة على المنحنى $v = s^2 + 6s + k$ ؛ وصنّفها بدلالة ك.

(٩) لكل دالة من الدوال الآتية:

(١) أوجد إحداثيات النقطة الحرجة.

(٢) حدد ما إذا كانت هذه النقطة عظمى أو صغرى، مبرراً السبب.

(٣) تحقق من إجابتك مستخدماً صيغة 'إكمال المربع' لإيجاد رأس المنحنى.

أ د(س) = س^٢ - ٨س + ٤ ب د(س) = س^٣ + ١٢س + ٥

ج د(س) = ٥س^٢ + ٦س + ٢ د د(س) = ٤ - ٦س - س^٢

هـ د(س) = ٩ + ٦س + س^٢ و د(س) = ١ - ٤س - س^٢

تمارين مراجعة نهاية الوحدة الرابعة

(١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 3$

(٢) إذا علمت أن $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ، حيث x ، ب عدنان ثابتان، $f'(1) = 18$ ، $f''(1) = 18$ ، فأوجد a ، ب.

(٣) إذا علمت أن $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 15\sqrt{x}$ ، فأوجد قيم x عندما يكون ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ يساوي ٩

(٤) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن $y = x^3 + (1 - x)^2$ ، حيث x ثابت.

(٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن $y = x^3 + 2x^2$ ، حيث x ثابت.

(١) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ ، حيث x ثابت.

(٢) أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا علمت أن $y = (x^3)^2$ ، حيث x ثابت.

(٥) أوجد معادلة العمودي على منحنى الدالة $v = s^4 - s^3$ عند $s = \frac{1}{3}$

(٦) ليكن $d(s) = \frac{1}{s}$:

أ) بين أن معادلة المماس لمنحنى الدالة $d(s) = v = \frac{1}{s}$ عند $s = l$ هي:

$$l^2 v + s = 2l$$

ب) عند أي نقطة على المنحنى تكون معادلة المماس $9v + s + 6 = 90$

(٧) يتقاطع مماس منحنى الدالة $v = \sqrt{s}$ عند النقطة $(4, 12)$ مع المحورين في النقطتين أ، ب.

بين أن طول القطعة المستقيمة أ ب يمكن كتابته في صورة $\sqrt{13}k$ ، وأوجد قيمة ك.

(٨) إذا علمت أن معادلة العمودي على منحنى الدالة $v = s^5 - 12s + 1$ عند نقطة ما هي

$$s + 18v + j = 0$$

★ (٩) يتقاطع منحنى الدالة $v = s^2$ مع منحنى الدالة $v = s^3$ عند النقطة $L(1, 1)$. إذا كان المماسان للمنحنيين عند النقطة L متعامدين، فأوجد العلاقة بين m ، n .

(١٠) يتقاطع العمودان على منحنَي الدالتين $v = \frac{1}{s^2}$ ، $v = \frac{1}{s^3}$ عند $s = 2$ في K . أوجد إحداثيات K .

(١١) إذا علمت أن الدالة $v = s^2 + أ s - ٧$ متزايدة عندما $s < ٥$ ، فأوجد قيمة $أ$.

(١٢) إذا علمت أن لمنحنى الدالة $v = \frac{1}{s^3} - أ s^2 + ٣ أ s + ١$ ، $(أ \neq ٠)$ نقطة حرجة واحدة، فأوجد قيمة $أ$.

(١٣) إذا علمت أن لمنحنى الدالة $v = أ s^3 + ب s^2 + ٨ s - ١$ نقطتين حرجتين عند $s = \frac{1}{3}$ ، $s = ٤$ ، فأوجد قيمة كل من $أ$ ، $ب$.



رقم الإيداع

٢٠٢٣/٦٥٧٩

الرياضيات المتقدمة

الصف الثاني عشر

كتاب النشاط

يتميز كتاب النشاط بمحتوى سهل يمكن استخدامه إلى جانب كتاب الطالب لمنهاج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر .

يتضمن كتاب النشاط:

- تمارين شاملة وهادفة تتبع ترتيب الدروس الموجودة في كتاب الطالب.
- تمارين مراجعة نهاية الوحدة تحتوي على أسئلة تحاكي الاختبار، وتغطي جميع موضوعات الوحدة، ويمكن استخدامها للتحقق من فهم الطالب للموضوعات التي درسها.
- فقرات مساعدة تزودك بالنصائح والإرشادات لحل الأسئلة والتحقق من الإجابات.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الثاني عشر أيضًا:

- كتاب الطالب.
- دليل المعلم.